PROBLEMA RESUELTO 1

Resuelva el sistema de ecuaciones

$$2x + 4y + 6z = 18$$

$$4x + 5y + 6z = 24$$

$$3x + y - 2z = 4$$

a. Utilizando el método de eliminación gaussiana

b. Utilizando el método de Gauss-Jordan

Solución

a. El primer paso en cualquiera de los dos métodos es escribir la matriz aumentada del sistema, que consiste en agregar a la matriz de coeficientes una columna con los términos independientes

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Ahora se procede a efectuar operaciones elementales hasta obtener la matriz escalonada

Fila 1 dividido entre 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Con el 1 de la primera fila, llamado pivote se procede a hacer las operaciones elementales para convertir en ceros los elementos por debajo del pivote.

Fila 1 por -4 mas fila 2 en fila 2

Fila 1 por -3 mas fila 3 en fila 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{bmatrix}$$

Ahora el primer elemento de la segunda fila debe ser 1

Fila 2 dividido entre -3

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{bmatrix}$$

Con el pivote de la segunda fila, hay que hacer cero todos los números por debajo de él

Fila 2 por 5 mas fila 3 en fila 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

Finalmente, para obtener la matriz escalonada se multiplica la fila 3 por -1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Al escribir el sistema de ecuaciones equivalente a partir de la matriz escalonada se tiene

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 9 \\ y + 2z &= 4 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Como el sistema equivalente tiene 3 ecuaciones con 3 incógnitas, tiene única solución. Al realizar sustituciones hacia atrás para despejar las incógnitas se tiene

$$z = 3$$

Despejando y

$$\begin{aligned} y + 2z &= 4 \\ y &= 4 - 2z = 4 - 2(3) = -2 \\ y &= -2 \end{aligned}$$

Despejando x

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 9 \\ x &= 9 - 2y - 3z = 9 - 2(-2) - 3(3) = 4 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Por lo que el sistema tiene solución única

$$x = 4, \quad y = -2, \quad z = 3$$

b. En el método de Gauss-Jordan hay que hacer ceros los números que están por debajo y por arriba del pivote. La matriz aumentada del sistema es

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Ahora se procede a efectuar operaciones elementales hasta obtener la matriz escalonada

Fila 1 dividido entre 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Con el 1 de la primera fila, llamado pivote se procede a hacer las operaciones elementales para convertir en ceros los elementos por debajo del pivote.

$\mathbf{F1 \times (-4) + F2 \rightarrow F2}$

$\mathbf{F1 \times (-3) + F3 \rightarrow F3}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{bmatrix}$$

Ahora el primer elemento de la segunda fila debe ser 1

F2 ÷ (-3) → F2

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{bmatrix}$$

Con el pivote de la segunda fila hay que hacer ceros los números por arriba y por debajo de él

F2 × (-2) + F1 → F1

F2 × (5) + F3 → F3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

Ahora hacemos que el primer número de la tercera fila sea 1

F3 × (-1) → F3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Finalmente, con el primer 1 de la tercera fila hacemos cero todos los números por encima de ese 1

F3 × (1) + F1 → F1

F3 × (−2) + F2 → F2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

La matriz anterior es escalonada reducida. El sistema equivalente de ecuaciones es

$$\begin{aligned} x &= 4 \\ y &= -2 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

El cual tiene solución única.