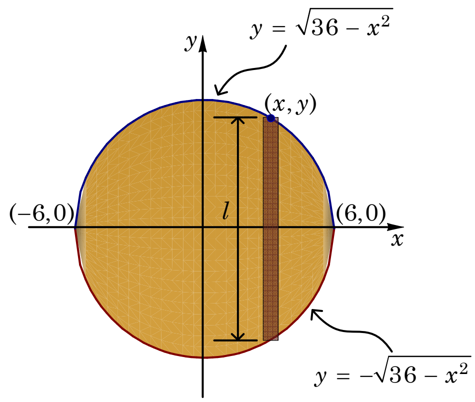
PROBLEMA RESUELTO 1

La base de un sólido es la región limitada por un círculo de radio 6 cm. Determine el volumen del sólido si todas las secciones planas, perpendiculares al eje x son triángulos equiláteros, con uno de sus lados en la base del sólido.

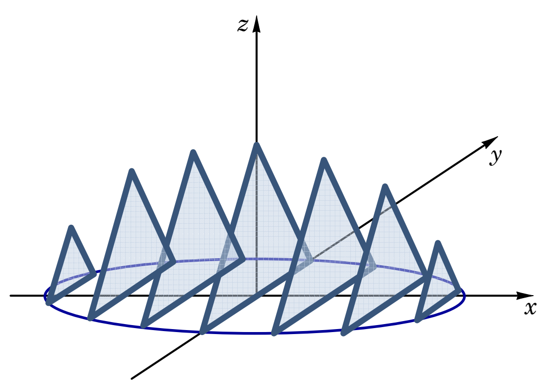
Solución

Primero se dibuja la base del sólido, se muestra la base del diferencial de volumen perpendicular al eje x. La ecuación del círculo con centro en el origen y radio 6 es $x^2 + y^2 = 36$.

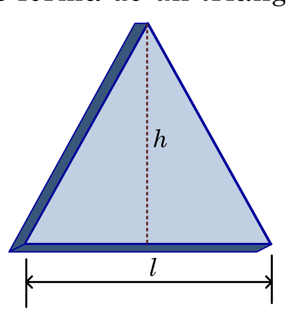


La ecuación del círculo se descompone en dos funciones, la mitad superior corresponde a la función $y = \sqrt{36 - x^2}$ y la mitad inferior corresponde a la función $y = -\sqrt{36 - x^2}$

La siguiente figura da una idea aproximada del sólido que se forma al dibujar varias de las secciones planas paralelas sobre la base en forma de círculo



El diferencial de volumen tiene forma de un triángulo equilátero de lado l y altura h



El área de un triángulo equilátero es

$$A = \frac{1}{2}lh$$

Utilizando el teorema de Pitágoras se tiene que

$$h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = l^2$$

$$h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{3l^2}{4}$$

$$h = \frac{\sqrt{3}l}{2}$$

Entonces el área del triángulo equilátero es

$$A = \frac{1}{2}lh = \frac{1}{2}l\frac{\sqrt{3}l}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}l^2$$

De la primera figura, donde se muestra la base del sólido, se puede utilizar la función superior $y = \sqrt{36 - x^2}$ para expresar la longitud de la base en términos de la variable de integración x

$$l = 2y = 2\sqrt{36 - x^2}$$

Entonces el área del diferencial de volumen es

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}l^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{36 - x^2}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(36 - x^2\right)$$

El volumen del sólido se puede calcular como

$$V = \int_a^b A(x)dx$$

$$= \int_{-6}^{6} \frac{\sqrt{3}}{4}\left(36 - x^2\right)dx$$

Como el sólido es simétrico se pude integrar de 0 a 6 y multiplicar el volumen por 2

$$V = 2\int_0^6 \frac{\sqrt{3}}{4}\left(36 - x^2\right)dx$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(36x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^6$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(36(6) - \frac{(6)^3}{3}\right) - 0$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}(216 - 72)$$

$$V = 72\sqrt{3}$$