UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-MB2 3P M 1S 2017

CURSO:	**Matemática Básica 2**
SEMESTRE:	**Primer Semestre**
CÓDIGO DEL CURSO:	**103**
TIPO DE EXAMEN:	**Tercer examen parcial**
FECHA DE EXAMEN:	**29 de mayo**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Eduardo De Paz**
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	**Eduardo De Paz**
COORDINADOR:	**Ing. Alfredo Gonzales**

Tercer examen parcial, Matutina

TEMARIO A

TEMA 1. (15 puntos)

El punto de intersección de la curva $y = Cos[x]$ y la recta $y = -x$ está cerca de $x = \frac{1}{2}$. Utilice el método de Newton para encontrarlo con cuatro cifras decimales exactas, dejando constancia de al menos 2 iteraciones.

TEMA 2. (20 puntos)

Calcule las siguientes integrales

$$\int_0^4 \frac{x}{16 + x^2} dx$$

$$\int \frac{2 + (\ln x)^2}{x(1 - \ln x)} dx$$

TEMA 3. (20 puntos)

a) Calcule la derivada de la función

$$y = \int_1^{x^2} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt + e^{3x}$$

TEMA 4. (20 puntos)

Dadas las siguientes curvas $y = 2e^x - 1$, $y = e^x$, $y = 2$ dibuje y determine el área de la región limitada por estas.

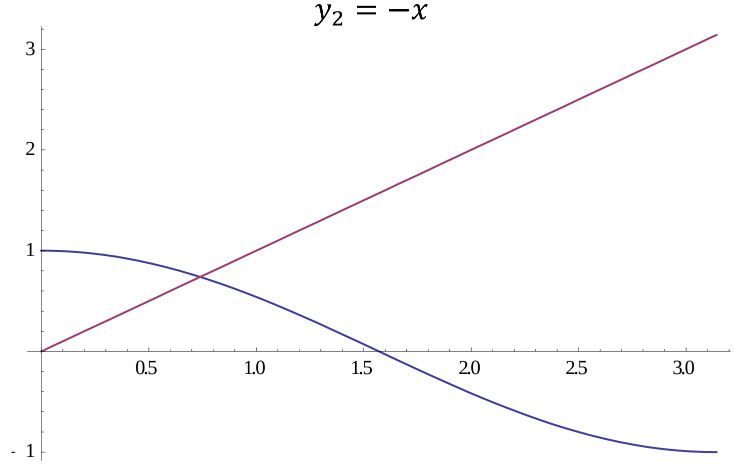
TEMA 5. (25 puntos)

El volumen de un sólido se obtiene al girar la región limitada por las curvas $y = 4 + 2x - x^2$ y $y = 4 - x$, alrededor de la recta $y = 1$.

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

TEMA 1. (15 puntos)

El punto de intersección de la curva $y = Cos[x]$ y la recta $y = -x$ está cerca de $x = \frac{1}{2}$. Utilice el método de Newton para encontrarlo con cuatro cifras decimales exactas, dejando constancia de al menos 2 iteraciones.

No	**EXPLICACION**	**OPERATORIA**
1.	El problema lo que nos solicita es determinar el punto de intersección de ambas curvas, las graficamos solo para tener una idea de su comportamiento.	$y_1 = Cos[x]$ $y_2 = -x$ 
2.	Para determinar las intersecciones de una curva deben de cumplir una condición, y es que los valores en y y los valores en x sean los mismos, por lo tanto, realizamos la igualación.	$y_1 = y_2$ $Cos[x] = -x$ $Cos[x] + x = 0$ $f[x] = Cos[x] + x$
3.	Ya que tenemos la función donde los valores de y son iguales debemos encontrar los valores de x pero en este problema nos piden realizarlo mediante el método de newton, para utilizar este método debemos de derivar la función.	$f[x] = Cos[x] + x$ $f'[x] = Sin[x] + 1$
4.	El teorema para resolver por el método de Newton es con la siguiente expresión.	$x_n = x_{n-1} + \frac{f[x_{n-1}]}{f'[x_{n-1}]}$
5.	Ahora solo es sustituir los valores en la función y en su derivada, ya que en el problema nos dan el valor inicial	$x_1 = x_0 + \frac{f[x_0]}{f'[x_0]}$

	para la primera iteración que es de ½ entonces determinaremos el valor de $x1$	$$x_1 = 0.5 + \frac{f[0.5]}{f'[0.5]}$$ $$x_1 = 0.5 + \frac{Cos[x] + x}{Sin[x] + 1}$$ $$x_1 = 0.5 + \frac{Cos[0.5] + 0.5}{Sin[0.5] + 1}$$ $$x_1 = 0.755222$$
6.	Con el valor de $x1$ determinamos el valor de $x2$ y asi consecutivamente	$$x_2 = 0.755222 + \frac{f[0.755222]}{f'[0.755222]}$$ $$x_2 = 0.5 + \frac{Cos[x] + x}{Sin[x] + 1}$$ $$x_2 = 0.755222 + \frac{Cos[0.755222] + 0.755222}{Sin[0.755222] + 1}$$ $$x_2 = 0.739142$$
7.	Realizando 4 iteraciones determinamos el valor donde se intersecan con 4 cifras significativas	$$x_4 = 0.7390$$

TEMA 2. (20 puntos)

Calcule las siguientes integrales

$$\int_0^4 \frac{x}{16+x^2}\,dx$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Al tener ya la integral se debe de revisar si es una integral definida o no, y también determinar si se puede resolver mediante una sustitución	$\int_0^4 \frac{x}{16+x^2}\,dx$
2.	Es una integral definida, y si tiene una sustitución muy clara, la cual es el denominador, se realiza la sustitución y su diferencial.	$U = 16 + x^2$ $dU = 0 + 2x * dx$ $x * dx = \frac{dU}{2}$
3.	Si se realiza una sustitución también debe de realizarse el cambio de los limites de integración Si U, es una función en términos de x, se sustituyen los valores para encontrar los nuevos límites de integración	$U = 16 + x^2$ Para el límite inferior $x = 0$ $U = 16 + (0)^2$ $U = 16$ Para el límite superior $x = 4$ $U = 16 + (4)^2$ $U = 32$
4.	Reescribiendo la integral nos queda como:	$\int_2^{32} \frac{1}{2 * U}\,dU$
5.	Resolviendo la integral nos queda	$\frac{1}{2} * [\mathrm{Ln}\, U\,]\,{}^{32}_{16}$

6.	Sustituimos los términos de la integral por sus límites de integración, y evaluamos.	$\frac{1}{2} * \mathrm{Ln}(32) - \frac{1}{2} * \mathrm{Ln}(16)$
7.	El resultado de la integral	$\int_0^4 \frac{x}{16+x^2} dx = 0.3465$

b)

$$\int \frac{2+(\ln x)^2}{x(1-\ln x)} dx$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Al tener ya la integral se debe de revisar si es una integral definida o no, y también determinar si se puede resolver mediante una sustitución	$\int \frac{2+(\ln x)^2}{x(1-\ln x)} dx$
2.	En esta integral miramos que el denominador tiene una sustitución y que al derivara la sustitución podemos abreviar tod el denominador.	$U = 1 - \ln x$ $dU = 0 - \frac{1}{x} * dx$ $\ln x = 1 - U$
3.	Reescribiendo la integral y simplificando la expresión posible, la integral nos queda como:	$\int \frac{2+(1-U)^2}{(U)} dU$ $\int \frac{2+(1-2U+U^2)}{(U)} dU$ $\int \frac{(3-2U+U^2)}{(U)} dU$
4.	Por las propiedades asociativas de la integral, separamos los términos	$\int \frac{3}{U} dU - \int \frac{2U}{U} dU + \int \frac{U^2}{U} dU$
5.	Resolvemos las integrales	$3 * \ln(U) - 2U + \frac{1}{2} * U^2 + C$
6.	Regresando a la variable original, el resultado de la integral es	$3 * \ln(1-\ln x) - 2(1-\ln x) + \frac{1}{2} * (1-\ln x)^2 + C$

TEMA 3.   (20 puntos)

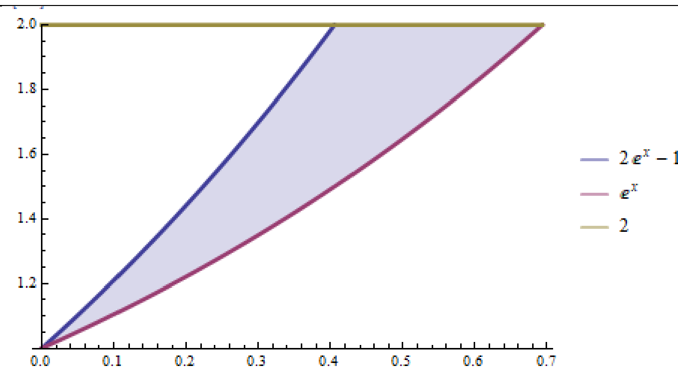
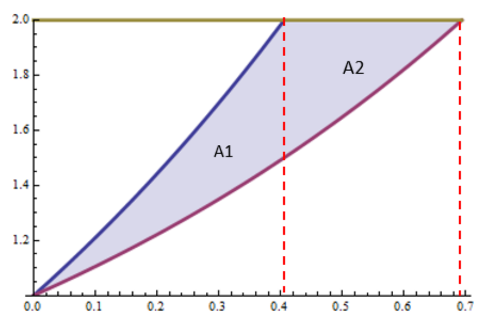
Calcule la derivada de la función

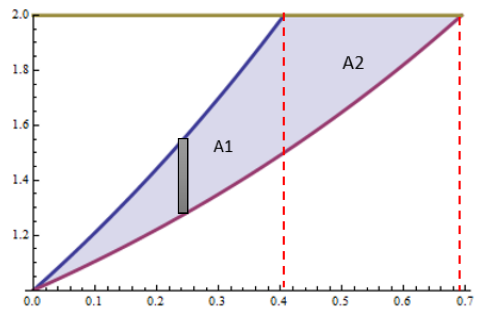
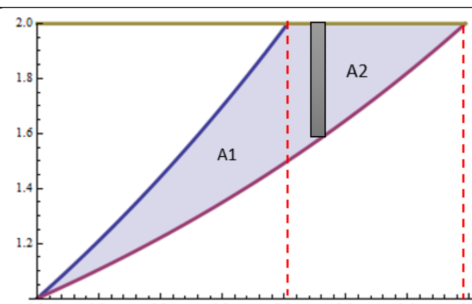
$$f(x) = \int_1^{x^2} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt + e^{3x}$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Ya que nos piden calcular la derivada de una función, podemos utilizar la propiedad asociativa de una derivada	$f(x) = m(x) + n(x)$ $\frac{d}{dx}(f(x)) = \frac{d}{dx}\big(m(x)\big) + \frac{d}{dx}\big(n(x)\big)$ $f'(x) = m'(x) + n'(x)$
2.	La explicación anterior es derivar cada parte de la función, pero como podemos ver, una de las expresiones tiene una derivada entonces debemos conocer cómo se deriva una integral.	$\frac{d}{dx}(f(x)) = \frac{d}{dx}\int_1^{x^2} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt + \frac{d}{dx}(e^{3x})$
3.	PARTE 1: Para eso utilizamos la regla de la cadena de la parte fundamental del cálculo.	$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t) * dt = f\big(b(x)\big) * b'(x) - f\big(a(x)\big) * a'(x)$
4.	Realizando la derivada de la primera parte de la función	$\frac{d}{dx}\int_1^{x^2} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x^2}} * (2x) + \frac{e^{-1}}{\sqrt{1}} * 0$
5.	Ahora solo dejamos lo más simplificada la expresión	$\frac{d}{dx}\int_1^{x^2} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x^2}} * (2x)$ $\frac{d}{dx}\int_1^{x^2} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = 2e^{-x^2}$
6.	PARTE 2: Derivamos la segunda parte de la función dejando el resultado los más simplificado posible	$\frac{d}{dx}e^{3x} = e^{3x} * 3$ $\frac{d}{dx}e^{3x} = 3e^{3x}$
7.	La respuesta final es la suma de ambas partes de la función	$f'(x) = 2e^{-x^2} + 3e^{3x}$

TEMA 4. (20 puntos)

Determine la región limitada por las curvas $y = 2e^x - 1,\ \ y = e^x,\ \ y = 2$ dibuje y determine el área de la región limitada por las curvas.

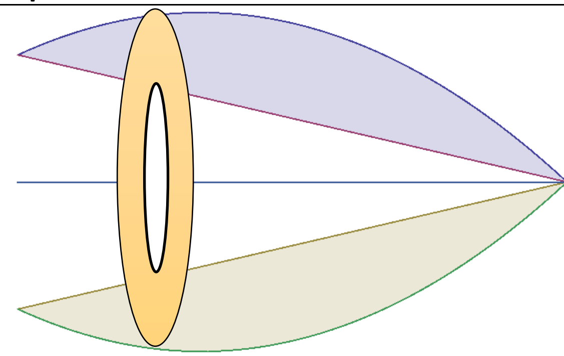
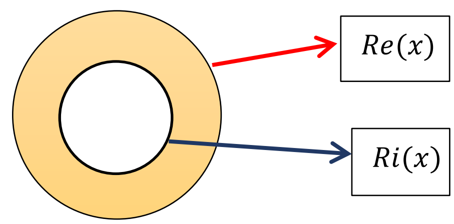
No.	Explicación	Operatoria
1.	Para resolver el área acotada por las curvas, vamos a graficarlas para tener una imagen clara y determinar los límites para encontrar el área	$y = 2e^x - 1,\ \ y = e^x,\ \ y = 2$
2.	Se grafican las curvas utilizando wólfram, y se nos solicita es área sombreada.	
3.	Ya que tenemos las gráficas podemos determinar el tipo de diferenciales que se utilizarán, en este caso serán diferenciales horizontales, y se segmentara la gráfica en 2 partes, el área 1 y el área 2. Es necesario determinar los puntos de intersección entre las curvas, como límites de integración	
4.	El primer punto de intersección se determina mediante la igualación de la curva de color azul ($y = 2e^x - 1$) y la curva color café ($y = 2$)	$2e^x - 1 = 2$ $e^x = \frac{2+1}{2}$ $e^x = \frac{3}{2}$ $x = Ln[\frac{3}{2}]$

5.	Segundo punto de intersección se determina mediante la igualación de la curva de color roja ($y = e^x$) y la curva color café ($y = 2$)	$e^x = 2$ $x = Ln[2]$
6.	Área 1: para determinar el área uno se realiza la integral de cero hasta el primero punto de intersección. El área se determina como el área del rectángulo dibujado, que es la gráfica superior menos la gráfica inferior, esto de resultado nos da la altura del rectángulo y se multiplica por su ancho, que es dx y tenemos el área, luego sumamos todos estos rectángulos mediante una integral con sus respectivos límites de integración	 $A1 = \int_{0}^{Ln[\frac{3}{2}]} (2e^x - 1 - e^x)$ $A1 = \int_{0}^{Ln[\frac{3}{2}]} (e^x - 1) = [e^x - x]_0^{Ln[\frac{3}{2}]}$ $A1 = [e^{Ln[\frac{3}{2}]} - Ln[\frac{3}{2}]] - [e^0 - 0]$ $A1 = [e^{Ln[\frac{3}{2}]} - Ln[\frac{3}{2}]] - [e^0 - 0]$ $A1 = 0.09453$
7.	Área 2: para determinar el área uno se realiza la integral desde el primer punto de intersección hasta el segundo punto de intersección. El área se determina como el área del rectángulo dibujado, que es la gráfica superior menos la gráfica inferior, esto de resultado nos da la altura del rectángulo y se multiplica	

	por su ancho, que es dx y tenemos el área, luego sumamos todos estos rectángulos mediante una integral con sus respectivos límites de integración	$$A2 = \int_{Ln\left[\frac{3}{2}\right]}^{Ln[2]} (2 - e^x)$$ $$A2 = \int_{Ln\left[\frac{3}{2}\right]}^{Ln[2]} (2 - e^x) = [2x - e^x]_{Ln\left[\frac{3}{2}\right]}^{Ln[2]}$$ $$A2 = \left[2 * Ln[2] - e^{Ln[2]}\right] - \left[2 * Ln\left[\frac{3}{2}\right] - e^{Ln\left[\frac{3}{2}\right]}\right]$$ $$A2 = 0.0753$$
8.	$$At = A1 + A2$$ $$At = 0.09453 + 0.0753 = 0.16989$$ $$At = 0.16989$$	

TEMA 5. (25 puntos)

El volumen de un sólido se obtiene al girar la región limitada por las curvas $y = 4 + 2x - x^2$ y $y = 4 - x$, alrededor de la recta $y = 1$.

No.	Explicación	Operatoria
1.	Realizamos la g´rafica de las curvas que se quieren girar alrededor del eje $y = 1$ y también se hace rotar, nos damos cuenta que genera un solido de revolución, y nos solicitan determinar el volumen.	
2.	El volumen del solido de revolución, como este tiene vacio en la parte interior se determina mediante el métodos de arandelas, por lo tanto se realiza la gráfica de la arandela con sus respectivos radios	
3.	El método para determinar volumen de un sólido de revolución por arandelas	$V = \int_a^b \pi(Re^2 - Ri^2)dx$
4.	Determinamos los radios, ya que no gira sobre el eje x o y, entonces se le debe de restar el valor del eje, como se hace a continuación	$Re = función - eje\ rotación$ $Re = (4 + 2x - x^2) - 1$
5.	El mismo procedimiento se realiza para el radio interior	$Ri = función - eje\ rotación$ $Ri = (4 - x) - 1$
6.	Ahora sustituimos los valores en la integral que determina el volumen del sólido de revolución	$V = \int_0^3 \pi([(4 + 2x - x^2) - 1]^2 - [(4 - x) - 1]^2)dx$

7.	Simplificamos la expresión	$$V = \int_0^3 \pi((3+2x-x^2)^2 - (3-x)^2)dx$$ $$V = \int_0^3 \pi((x+1)^2(3-x)^2 - (3-x)^2)dx$$
8.	Resolvemos la integral, y nos da el resultado del valor que tiene el volumen del solido de revolución	In[173]:= $\int_0^3 \pi\left((x+1)^2 (3-x)^2 - (3-x)^2\right) dx$ Out[173]= $\frac{108\pi}{5}$
9.	$$v = \frac{108}{5}\pi$$	