UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE 103-2-M-1-06-2017

CURSO:	**Matemática Básica 2**
SEMESTRE:	**Primero**
CÓDIGO DEL CURSO:	**103**
TIPO DE EXAMEN:	**Segundo parcial**
FECHA DE EXAMEN:	**Junio del 2017**
PERSONA QUE ELABORÓ LA CLAVE:	**María José Alburez García**
PERSONA QUE REVISÓ LA CLAVE:	**Ing. Miguel Castillo**

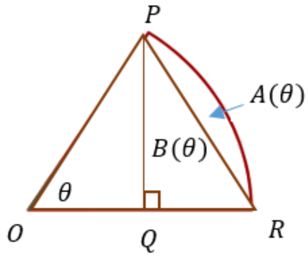
UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA | JUNIO 2017
FACULTAD DE INGENIERÍA | TEMARIO L
ESCUELA TÉCNICA
MATEMÁTICA BÁSICA 2

SEGUNDO EXAMEN PARCIAL

TEMA No. 1: (25 puntos)

a. ¿Para cuáles valores de las constantes m y n se tiene que el punto (2,16) es un punto de inflexión de la curva $f(x) = mx^3 + nx^2$?
b. Calcule y' de: $b.1)\ \cot(xy) + \frac{x}{y}$=3; $b.2)\ x = y^{2\log(y)},\ y > 0$

TEMA No. 2: (15 puntos)



La figura muestra un sector de un círculo con ángulo central θ. Sea $A(\theta)$ el área del segmento entre la cuerda PR y el arco PR. Sea $B(\theta)$ el área del triángulo PQR. Encuentre

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{A(\theta)}{B(\theta)}$$

TEMA No. 3: (20 puntos)

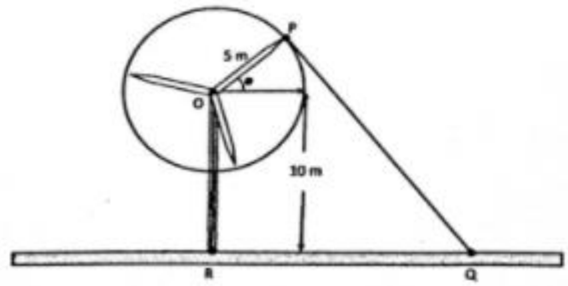
Se muestra la gráfica de la derivada f' de una función continua f.

a. ¿En qué valores de x tiene f un máximo local? ¿mínimo local?
b. ¿Sobre qué intervalos es creciente/decreciente?
c. Establezca las coordenadas x de los puntos de inflexión.
d. ¿Sobre qué intervalos es f cóncava hacia arriba? ¿cóncava hacia abajo?
e. Suponiendo que f (0) =-1, esboce una gráfica de f.

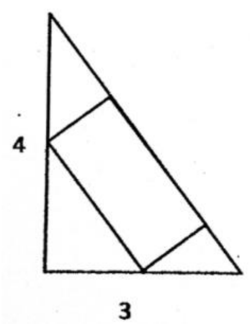
TEMA No. 4: (20 puntos)

Un generador eólico tiene aspas de 5 metros de radio y su centro de giro está sobre un poste de 10 metros de altura (Ver figura). En los extremos de cada aspa hay una luz láser cuyo haz es tangente a la circunferencia descrita por las aspas al girar en contra de las agujas del reloj.

Si el generador da 10 vueltas por minuto, ¿a qué razón se aleja la luz incidente en el piso en el punto Q del punto R, también ubicado en el piso; cuando $\theta = \frac{\pi}{4}$?



TEMA No. 5: (20 puntos)



Un rectángulo se inscribe en un triángulo rectángulo de catetos 3 y 4cm, respectivamente, con uno de sus lados sobre la hipotenusa y dos de sus vértices sobre los catetos del triángulo. Determine las dimensiones del rectángulo de mayor área que puede inscribirse.

TEMA 1

a. ¿Para cuáles valores de las constantes m y n se tiene que el punto (2,16) es un punto de inflexión de la curva $f(x) = mx^3 + nx^2$?

#	Descripción	Operación
1.	Se evalúa la función en el punto (2,16) para obtener *n* en términos de *m*.	$f(x) = mx^3 + nx^2$ $16 = 8m + 4n$ $n = 4 - 2m$
2.	Se calcula la segunda derivada.	$f'(x) = 3mx^2 + 2nx$ $f''(x) = 6mx + 2n$
3.	Se iguala la segunda derivada a 0, se evalúa en x=2 y se reemplaza *n* en términos de *m* para poder despejarla y obtener su valor.	$0 = 6m(2) + 2(4 - 2m)$ $0 = 12m + 8 - 4m$ $0 = 8m + 8$ $m = -1$
4.	Se calcula el valor de *n*.	$n = 4 - 2(-1)$ $n = 4 + 2$ $n = 6$
Los valores de m y n son -1 y 6, respectivamente.		

b. Calcule y' de: $b.1)\ \cot(xy) + \frac{x}{y}$=3

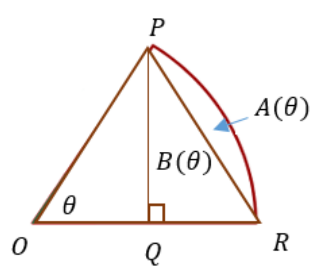
#	Descripción	Operación
1.	Se deriva implícitamente y siempre utilizando la regla de la cadena.	$-csc^2(xy)\frac{d(xy)}{dx} + \left(\frac{y - xy'}{y^2}\right) = 0$ $-csc^2(xy)(xy' + y) + \left(\frac{y - xy'}{y^2}\right) = 0$
2.	Se despeja y'.	$y' = -\frac{ycsc^2(xy) - \frac{1}{y}}{xcsc^2(xy) + \frac{x}{y^2}}$

$y' = -\dfrac{ycsc^2(xy) - \dfrac{1}{y}}{xcsc^2(xy) + \dfrac{x}{y^2}}$

$$b.2)\ x = y^{2\log(y)}, \qquad y > 0$$

#	Descripción	Operación
1.	Se aplica logaritmo a ambos lados de la ecuación.	$x = y^{2\log(y)}$ $\log(x) = \log(y^{2\log(y)})$ $\log(x) = 2\log(y)\log(y)$ $\log(x) = 2(\log(y))^2$
2.	Se deriva implícitamente y siempre utilizando la regla de la cadena.	$\dfrac{1}{xln(10)} = 4\log(y)\left(\dfrac{1}{yln(10)}y'\right)$ $\dfrac{1}{x} = \log(y^4)\left(\dfrac{1}{y}y'\right)$
3.	Se despeja y'.	$y' = \dfrac{y}{xlog(y^4)}$
		$y' = \dfrac{y}{xlog(y^4)}$

TEMA 2



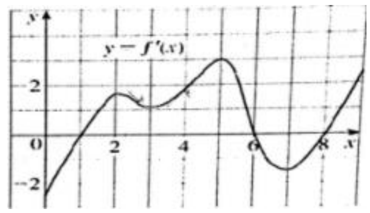
La figura muestra un sector de un círculo con ángulo central θ. Sea $A(\theta)$ el área del segmento entre la cuerda PR y el arco PR. Sea $B(\theta)$ el área del triángulo PQR. Encuentre

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{A(\theta)}{B(\theta)}$$

#	Descripción	Operación
1.	Se plantea la ecuación para $A(\theta)$.	$A(\theta) = \dfrac{1}{2}r^2\theta - \dfrac{1}{2}r^2 sen\theta$ $A(\theta) = \dfrac{r^2(\theta - sen\theta)}{2}$

2.	Se plantea la ecuación para $B(\theta)$.	$B(\theta)=\frac{(r-rcos\theta)(rsen\theta)}{2}$ $B(\theta)=\frac{r^2(1-cos\theta)(sen\theta)}{2}$
3.	Se reemplazan $A(\theta)$ y $B(\theta)$ en el límite.	$\lim_{\theta\to 0^+}\frac{A(\theta)}{B(\theta)}=$ $\lim_{\theta\to 0^+}\frac{\frac{r^2(\theta-sen\theta)}{2}}{\frac{r^2(1-cos\theta)(sen\theta)}{2}}=$ $\lim_{\theta\to 0^+}\frac{\theta-sen\theta}{(1-cos\theta)(sen\theta)}$
4.	Se evalúa el límite.	$\lim_{\theta\to 0^+}\frac{\theta-sen\theta}{(1-cos\theta)(sen\theta)}=$ $\lim_{\theta\to 0^+}\frac{0-0}{(1-1)(0)}=\frac{0}{0}=F.I$
5.	Se aplica L' Hopital al límite.	$L'H\lim_{\theta\to 0^+}\frac{\theta-sen\theta}{(1-cos\theta)(sen\theta)}=$ $\lim_{\theta\to 0^+}\frac{1-cos\theta}{(1-cos\theta)(cos\theta)+(sen^2\theta)}=$ $\lim_{\theta\to 0^+}\frac{1-cos\theta}{(1-cos\theta)(cos\theta)+(1-cos^2\theta)}=$ $\lim_{\theta\to 0^+}\frac{1-cos\theta}{(1-cos\theta)(cos\theta)+(1+cos\theta)(1-cos\theta)}=$ $\lim_{\theta\to 0^+}\frac{1-cos\theta}{(1-cos\theta)[cos\theta+(1+cos\theta)]}=$ $\lim_{\theta\to 0^+}\frac{1}{1+2cos\theta}$
6.	Se evalúa el límite resultante.	$\lim_{\theta\to 0^+}\frac{1}{1+2cos\theta}=$ $\lim_{\theta\to 0^+}\frac{1}{1+2(1)}=$ $\frac{1}{3}$
$\lim_{\theta\to 0^+}\frac{A(\theta)}{B(\theta)}=\frac{1}{3}$		

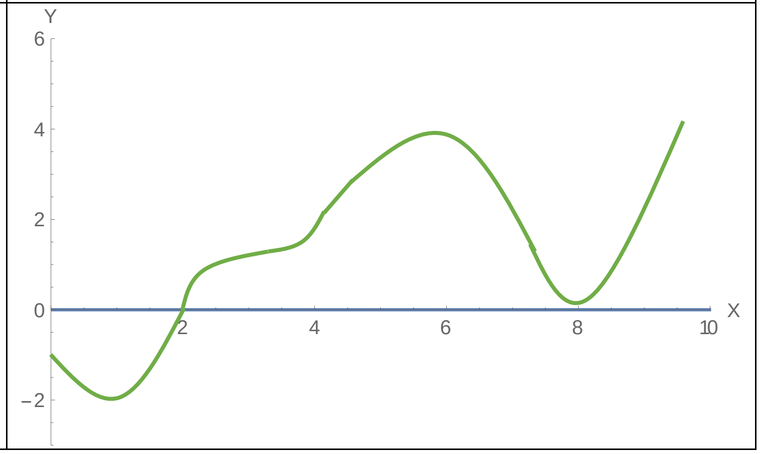
TEMA 3



Se muestra la gráfica de la derivada f' de una función continua f.

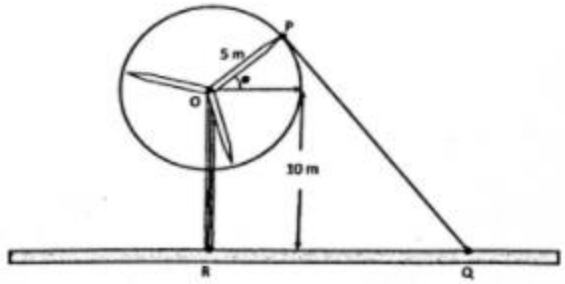
a. ¿En qué valores de x tiene f un máximo local? ¿mínimo local?
b. ¿Sobre qué intervalos es creciente/decreciente?
c. Establezca las coordenadas x de los puntos de inflexión.
d. ¿Sobre qué intervalos es f cóncava hacia arriba? ¿cóncava hacia abajo?
e. Suponiendo que f (0) =-1, esboce una gráfica de f.

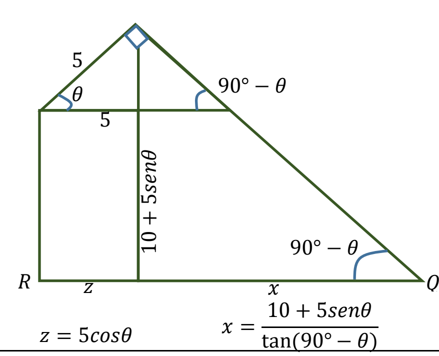
#	Descripción	Operación
a.	Se observa los valores de x en los que f'(x)=0 y si va del eje negativo al positivo es un mínimo y si va del eje positivo al negativo es un máximo.	Mínimos: x=1, x=8 Máximo: x=6
b.	Se observa los intervalos en los que f'(x) es negativa para determinar que f es decreciente y los intervalos en los que f'(x) es positiva para determinar que f es creciente.	Decreciente: (-∞,1) U (6,8) Creciente: (1,6) U (8, +∞)
c.	Se observa los valores de x en los que la pendiente de f'(x), es decir f''(x) es igual a 0.	x=2 x=3 x=5 x=7
d.	Se observa los intervalos en los que la pendiente de f'(x) es positiva para determinar que f es cóncava hacia arriba y los intervalos en los que la pendiente de f'(x) es negativa para	Hacia arriba: (-∞,2) U (3,5) U (7, +∞) Hacia abajo: (2,3) U (5,7)

	determinar que f es cóncava hacia abajo.	
e.	Con la información anterior, se procede a esbozar la gráfica.	

TEMA 4

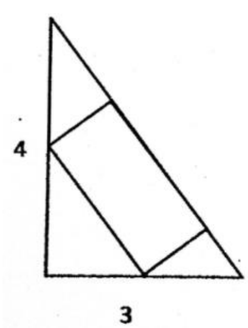
Un generador eólico tiene aspas de 5 metros de radio y su centro de giro está sobre un poste de 10 metros de altura (Ver figura). En los extremos de cada aspa hay una luz láser cuyo haz es tangente a la circunferencia descrita por las aspas al girar en contra de las agujas del reloj.
Si el generador da 10 vueltas por minuto, ¿a qué razón se aleja la luz incidente en el piso en el punto Q del punto R, también ubicado en el piso; cuando $\theta = \frac{\pi}{4}$?



#	Descripción	Operación
1.	Se convierte la velocidad angular a rad/min.	$\frac{d\theta}{dt} = \frac{10 vueltas}{minuto} = \frac{20\pi rad}{minuto}$
2.	Se esboza el dibujo del planteamiento del problema y se definen variables.	

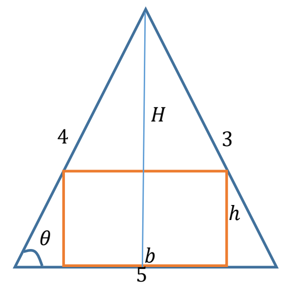
3.	Se plantea la ecuación de la distancia entre Q y R.	$$w = z + x$$ $$w = 5cos\theta + \frac{10 + 5sen\theta}{\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}$$ $$w = 5cos\theta + \frac{10}{\cot\theta} + \frac{5sen\theta}{cot\theta}$$
4.	Se deriva la ecuación de w respecto al tiempo.	$$\frac{dw}{dt} = -5sen\theta\frac{d\theta}{dt} + 10sec^2\theta\frac{d\theta}{dt} + [5sen\theta sec^2\theta + 5cos\theta tan\theta]\frac{d\theta}{dt}$$
5.	Se reemplazan los valores de θ y $\frac{d\theta}{dt}$.	$$\frac{dw}{dt} = \left[-5sen\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{10}{cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} + \frac{5sen\left(\frac{\pi}{4}\right)}{cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} + \frac{5cos\left(\frac{\pi}{4}\right)sen\left(\frac{\pi}{4}\right)}{cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}\right](20\pi)$$
6.	Se simplifica la expresión.	$$\frac{dw}{dt} = \left[\frac{-5\sqrt{2}}{2} + \frac{10}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \frac{5}{\frac{\sqrt{2}}{2}} + 5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right](20\pi)$$ $$= \left[\frac{10(4)}{2} + \frac{10}{\sqrt{2}}\right](20\pi)$$ $$= 400\pi + \frac{200\pi}{\sqrt{2}}$$ $$= 1700.9\ rad/min$$
	La luz se aleja a una razón de 1700.9 rad/min.	

TEMA 5



Un rectángulo se inscribe en un triángulo rectángulo de catetos 3 y 4cm, respectivamente, con uno de sus lados sobre la hipotenusa y dos de sus vértices sobre los catetos del triángulo. Determine las dimensiones del rectángulo de mayor área que puede inscribirse.

#	Descripción	Operación
1.	Se determina la ecuación a maximizar.	$A = bh$

2.	Se esboza el dibujo del planteamiento del problema y se definen variables.	
3.	Se calcula el ángulo θ.	$\theta = tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ $\theta = 0.644$
4.	Se calcula la altura del triángulo.	$H = 4sen(0.644) = \frac{12}{5}$
5.	Se determina la base del rectángulo en términos de su altura utilizando triángulos semejantes.	$\frac{b}{5} = \frac{\frac{12}{5} - h}{\frac{12}{5}}$ $\frac{12b}{25} = \frac{12}{5} - h$ $12b = 5(12) - 25h$ $b = 5 - \frac{25}{12}h$
6.	Se vuelve a plantear el área, ahora en términos de una sola variable.	$A = \left(5 - \frac{25}{12}h\right)(h)$ $A = 5h - \frac{25}{12}h^2$
7.	Se deriva la ecuación y se iguala a 0.	$A' = 5 - \frac{25}{6}h = 0$
8.	Se despeja *h*.	$h = \frac{5(6)}{25} = \frac{30}{25} = \frac{6}{5}$
9.	Se calcula *b*.	$b = 5 - \frac{25}{12}\left(\frac{6}{5}\right) = \frac{5}{2}$
Las dimensiones del rectángulo son $\frac{5}{2}$x$\frac{6}{5}$.		