

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CLAVE 103-3-M-1-06-2017



CURSO:	Matemática Básica 2
SEMESTRE:	Primero
CÓDIGO DEL CURSO:	103
TIPO DE EXAMEN:	Tercer parcial
FECHA DE EXAMEN:	Junio del 2017
PERSONA QUE ELABORÓ LA CLAVE:	María José Alburez García
PERSONA QUE REVISÓ LA CLAVE:	Ing. Miguel Castillo

TERCER EXAMEN PARCIAL

TEMA No. 1: (20 puntos)

- Utilice el límite de una suma de Riemann para evaluar la integral definida de:
 $f(x) = 1 + x^2$ en el intervalo $[2,4]$
- Utilice el Teorema fundamental del Cálculo para evaluar la integral definida en el inciso (a).

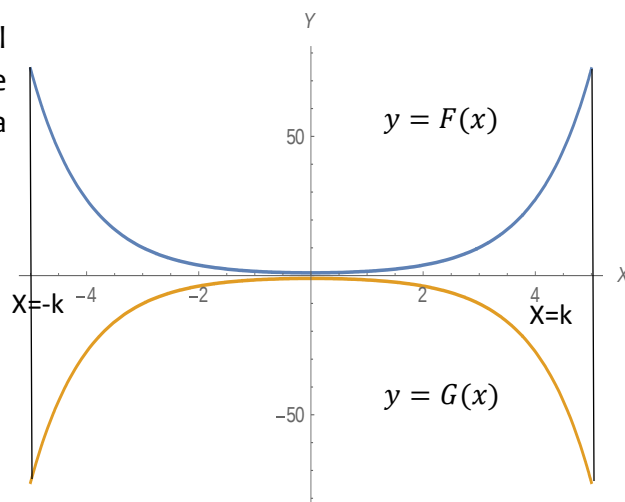
TEMA No. 2: (25 puntos)

Hasta una exactitud de 5 cifras decimales, utilice el método de Newton con $X_0=4$, para hallar el valor de la constante $k>0$, tal que el área (mostrada en la figura), limitada por las gráficas de:

$$F(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \quad G(x) = -\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right);$$

$$x = -k; \quad x = k$$

Tenga un área de $16k \text{ cm}^2$.



TEMA No. 3: (25 puntos)

Utilice reglas de integración para evaluar:

a. $\int x^2 \sqrt{x-1} dx$

b. $\int \frac{5x dx}{x^2+4x+20}$

c. Hallar $\frac{dy}{dx}$ si: $y = \int_{1/x}^{x^3} \theta \sin \theta d\theta$

TEMA No. 4: (30 puntos)

Sea R la región limitada por las gráficas de:

$$y = \sqrt{x+5} \quad y = \sqrt{5-x} \quad y = 1 - \frac{x^2}{25}$$

Plantee una integral y resuélvala para calcular el volumen del sólido obtenido al rotar R alrededor de la recta $x=5$.

TEMA 1

- a. Utilice el límite de una suma de Riemann para evaluar la integral definida de:

$$f(x) = 1 + x^2 \text{ en el intervalo } [2,4]$$

#	Descripción	Operación
1.	Se encuentran las expresiones para Δx y x_k .	$\Delta x = \frac{4-2}{n} = \frac{2}{n}$ $x_k = 2 + \frac{(4-2)k}{n} = 2 + \frac{2}{n}k$
2.	Se plantea el límite de la suma de Riemann.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x = \left[1 + \left(2 + \frac{2k}{n} \right)^2 \right] \left(\frac{2}{n} \right) =$ $\left[1 + \left(4 + \frac{8k}{n} + \frac{4k^2}{n^2} \right) \right] \left(\frac{2}{n} \right) =$ $\left(5 + \frac{8k}{n} + \frac{4k^2}{n^2} \right) \left(\frac{2}{n} \right)$
3.	Se simplifica.	$\left(5 + \frac{8k}{n} + \frac{4k^2}{n^2} \right) \left(\frac{2}{n} \right) =$ $\left(5n + \frac{8n(n+1)}{2n} + \frac{4n(n+1)(2n+1)}{6n^2} \right) \left(\frac{2}{n} \right) =$ $\frac{10}{n} + \frac{16k}{n^2} + \frac{8k^2}{n^3} =$ $\frac{10}{n}(n) + \frac{16}{n^2} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) + \frac{8}{n^3} \left(\frac{n(2n+1)(n+1)}{6} \right) =$ $10 + \frac{16n}{2n} + \frac{8}{n} + \frac{8}{n^2} \left(\frac{2n^3 + 3n + 1}{6} \right) =$ $10 + 8 + \frac{8}{n} + \frac{16n^2}{6n^2} + \frac{3(8)n}{6n^2} + \frac{8}{6n^2} =$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n 10 + 8 + \frac{8}{n} + \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2} =$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x = \frac{62}{3} u^2$
La integral definida de $f(x) = 1 + x^2$ en el intervalo $[2,4]$ tiene un valor de $\frac{62}{3} u^2$.		

- b. Utilice el Teorema fundamental del Cálculo para evaluar la integral definida en el inciso (a).

#	Descripción	Operación
1.	Se plantea la integral y se evalúa.	$\int_2^4 (1 + x^2) dx =$ $\left[x + \frac{x^3}{3} \right]_2^4 = \left(4 + \frac{(4)^3}{3} \right) - \left(2 + \frac{(2)^3}{3} \right)$
2.	Se simplifica.	$\int_2^4 (1 + x^2) dx = \frac{62}{3} u^2$
La integral definida de $f(x) = 1 + x^2$ en el intervalo $[2,4]$ tiene un valor de $\frac{62}{3} u^2$.		

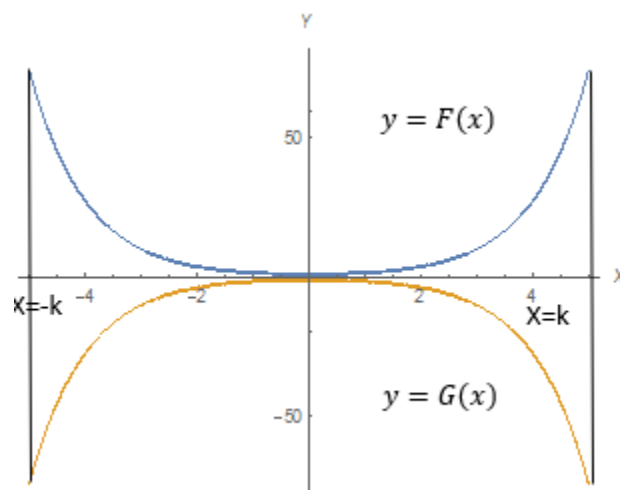
TEMA 2

Hasta una exactitud de 5 cifras decimales, utilice el método de Newton con $X_0=4$, para hallar el valor de la constante $k>0$, tal que el área (mostrada en la figura), limitada por las gráficas de:

$$F(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \quad G(x) = -\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right);$$

$$x = -k; \quad x = k$$

Tenga un área de $16k \text{ cm}^2$.



#	Descripción	Operación
1.	Se plantea la integral del área entre las curvas y se iguala a $16k$.	$A = \int_a^b f(x) dx$ $A = 2 \int_0^k \left[\frac{e^x + e^{-x}}{2} - \left(-\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) \right] dx = 16k$ $A = 2 \int_0^k (e^x + e^{-x}) dx = 16k$ $A = 2 \int_0^k e^x dx + 2 \int_0^k e^{-x} dx = 16k$ $A = [2e^x - 2e^{-x}]_0^k = 16k$ $(2e^k - 2e^{-k}) - (2e^0 - 2e^{-0}) = 16k$ $2e^k - 2e^{-k} = 16k$ $2e^k - 2e^{-k} - 16k = 0$
2.	Se deriva la función resultante.	$f(k) = 2e^k - 2e^{-k} - 16k$ $f'(k) = 2e^k + 2e^{-k} - 16$
3.	Se empieza a iterar con la ecuación de Newton.	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x)}{f'(x)}$ $x_1 = 4 - \frac{2e^4 - 2e^{-4} - 16(4)}{2e^4 + 2e^{-4} - 16} = 4$
4.	Se itera hasta tener el número de decimales deseado.	$x_2 = 3.51563$ $x_3 = 3.30203$ $x_4 = 3.26482$ $x_5 = 3.26380$
El valor de la constante k es 3.26380.		

TEMA 3

a. $\int x^2 \sqrt{x-1} dx$

#	Descripción	Operación
1.	Se define la variable a reemplazar y se deriva.	$u = x - 1$ $x = u + 1$ $du = dx$
2.	Se realiza la sustitución.	$\int (u+1)^2 (u)^{\frac{1}{2}} du =$ $\int (u^2 + 2u + 1)(u)^{\frac{1}{2}} du =$

		$\int \left(u^{\frac{5}{2}} + 2u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}} \right) du =$ $\frac{2}{7} u^{7/2} + \frac{4}{5} u^{5/2} + \frac{2}{3} u^{3/2}$
3.	Se resuelve la integral.	$\int x^2 \sqrt{x-1} dx =$ $\frac{2}{7} (x-1)^{7/2} + \frac{4}{5} (x-1)^{5/2} + \frac{2}{3} (x-1)^{3/2} + C$
El resultado de la integral indefinida es		
$\frac{2}{7} (x-1)^{7/2} + \frac{4}{5} (x-1)^{5/2} + \frac{2}{3} (x-1)^{3/2} + C.$		

b. $\int \frac{5x dx}{x^2+4x+20}$

#	Descripción	Operación
1.	Se realiza una completación de cuadrados en el denominador.	$\int \frac{5x}{(x^2 + 4x + 4) + 20 - 4} dx$ $\int \frac{5x}{(x+2)^2 + 16} dx$
2.	Se define la variable a reemplazar y se deriva.	$u = x + 2$ $du = dx$ $x = u - 2$
3.	Se realiza la sustitución.	$\int \frac{5(u-2)}{u^2 + 16} du$ $\int \frac{5u}{u^2 + 16} du - 10 \int \frac{1}{u^2 + 16} du$
4.	Se define otra variable para reemplazar y se deriva.	$z = u^2 + 16$ $dz = 2u du$
5.	Se realiza la sustitución y se resuelve la integral.	$\frac{5}{2} \int \frac{1}{z} dz - 10 \left(\frac{1}{4} \tan^{-1} \left(\frac{u}{4} \right) \right) =$ $\frac{5}{2} \ln (x+2)^2 + 16 - \frac{5}{2} \tan^{-1} \left(\frac{x+2}{4} \right) + C$
El resultado de la integral indefinida es		
$\frac{5}{2} \ln (x+2)^2 + 16 - \frac{5}{2} \tan^{-1} \left(\frac{x+2}{4} \right) + C.$		

c. Hallar $\frac{dy}{dx}$ si: $y = \int_{1/x}^{x^3} \theta \operatorname{sen} \theta \, d\theta$

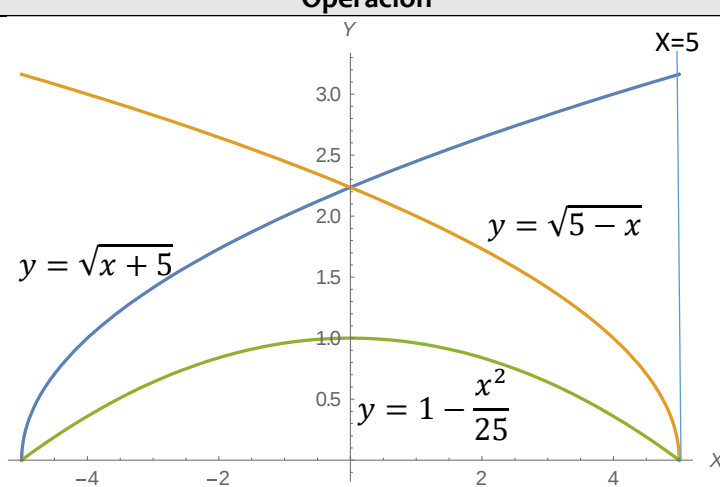
#	Descripción	Operación
1.	Se cambian los límites de integración para obtener dos integrales separadas.	$\frac{dy}{dx} \int_{\frac{1}{x}}^{x^3} (\theta \operatorname{sen} \theta) \, d\theta =$ $\frac{dy}{dx} \left[\int_{1/x}^0 (\theta \operatorname{sen} \theta) \, d\theta + \int_0^{x^3} (\theta \operatorname{sen} \theta) \, d\theta \right]$
2.	Se resuelven las integrales.	$-\frac{1}{x} \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right) * \left(-\frac{1}{x^2} \right) + x^3 \operatorname{sen}(x^3) * (3x^2) =$ $\frac{\operatorname{sen}(1/x)}{x^3} + 3x^5 \operatorname{sen}(x^3)$
El resultado de la integral indefinida es $\frac{\operatorname{sen}(1/x)}{x^3} + 3x^5 \operatorname{sen}(x^3)$.		

TEMA 4

Sea R la región limitada por las gráficas de:

$$y = \sqrt{x+5} \quad y = \sqrt{5-x} \quad y = 1 - \frac{x^2}{25}$$

Plantee una integral y resuélvala para calcular el volumen del sólido obtenido al rotar R alrededor de la recta $x=5$.

#	Descripción	Operación
1.	Se grafica la región limitada por las curvas descritas.	
2.	Se plantea el volumen del sólido de revolución.	$V = 2\pi \left[\int_0^5 (5-x) \left[\sqrt{5-x} - \left(1 - \frac{x^2}{25} \right) \right] dx \right]$ $+ \int_{-5}^0 (5-x) \left[\sqrt{x+5} - \left(1 - \frac{x^2}{25} \right) \right] dx$

3.	Se simplifican las integrales.	$V = 2\pi \int_0^5 \left(5\sqrt{5-x} - 5 + \frac{5x^2}{25} - x\sqrt{5-x} + x - \frac{x^3}{25} \right) dx$ $+ 2\pi \int_{-5}^0 \left(5\sqrt{5+x} - 5 + \frac{5x^2}{25} - x\sqrt{5+x} + x - \frac{x^3}{25} \right) dx$
4.	Se evalúan y resuelven las integrales.	$V = 2\pi \left[-\frac{10}{3}(5-x)^{\frac{3}{2}} - 5x + \frac{x^3}{15} + \frac{10}{3}(5-x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}(5-x)^{\frac{5}{2}} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{100} \right]_0^5$ $+ 2\pi \left[\frac{10}{3}(5+x)^{\frac{3}{2}} - 5x + \frac{x^3}{15} + \frac{10}{3}(5+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}(5+x)^{\frac{5}{2}} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{100} \right]_{-5}^0$
5.	Se simplifica.	$V = 2\pi \left\{ \left[-25 + \frac{25}{3} + \frac{25}{2} - \frac{25}{4} \right] - [-22.36] + [52.17] - \left[25 - \frac{25}{3} + \frac{25}{2} - \frac{25}{4} \right] \right\}$ $V = 2\pi(41.20) = 258.85u^3$
El volumen del sólido de revolución es $258.85u^3$.		