UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-103-2-M-2-00-2016

CURSO:	**Matemática Básica 2**
SEMESTRE:	**Segundo**
CÓDIGO DEL CURSO:	**103**
TIPO DE EXAMEN:	**Segundo Examen Parcial**
FECHA DE EXAMEN:	**13 de octubre de 2016**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Jose Castillo**
REVISO EL EXAMEN:	
COORDINADOR:	**Ing. Arturo Samayoa**

Segundo examen parcial

Temario A

Tema 1: (30 puntos)

a. Calcule la primera derivada $\frac{dy}{dx}$ y simplifique la respuesta.

i. $y = 8\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{4}\right) - \frac{1}{2}x\sqrt{16 - x^2}$

ii. $\tan(x + y) - x = xe^y + y$

b. Utilice la regla de L'hopital para calcular el límite

$$\lim_{x \to 0^+}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(x+1)}\right)$$

Tema 2: (10 puntos)

Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = x^{x+2}$, en $x = 1$.

Tema 3: (20 puntos)

Una refinería de petróleo se encuentra en la orilla norte de un río recto que tiene 200 metros de ancho. Se debe construir una tubería desde la refinería a los tanques de almacenamiento situados en la orilla sur, 600 metros al este de la refinería. El costo de colocación de la tubería es de \$400 por km sobre la tierra desde la refinería hasta un punto *P* sobre la orilla norte y de \$800 bajo el río desde el punto *P* hasta los tanques de almacenamiento. Determine donde debe ubicarse el punto *P* de manera que el costo total de la tubería sea mínimo.

Tema 4: (20 puntos)

Un faro se localiza en una pequeña isla a 3 km del punto más cercano *P* que se encuentra en una playa recta; la lámpara del faro da cuatro revoluciones por revoluciones por minuto. ¿Qué tan rápido se mueve el haz de luz a lo largo de la playa, cuando éste se encuentra a 1.5 km del punto *P?*

Tema 5: (20 puntos)

Dada la función

$$f(x) = 3x^{5/3} - 15x^{2/3}$$

Encuentre los intervalos donde la función es creciente, intervalos donde la función es decreciente, máximos y mínimos relativos, intervalos donde es cóncava hacia arriba, intervalos donde es cóncava hacia abajo, puntos de inflexión. Dibuje la gráfica de la función.

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

Tema 1: 30 puntos

a. Calcule la primera derivada $\frac{dy}{dx}$ y simplifique la respuesta.

iii. $y = 8\,\text{sen}^{-1}\left(\frac{x}{4}\right) - \frac{1}{2}x\sqrt{16 - x^2}$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Primero derivamos la expresión	$y = 8\,\text{sen}^{-1}\left(\frac{x}{4}\right) - \frac{1}{2}x\sqrt{16 - x^2}$
2.	Procedemos a derivar	$\frac{dy}{dx} = 8\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{4}\right)^2}}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)$ $-\left(\frac{1}{2}\right)\left[(x)\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{16-x^2}}\right)\cdot(-2x) + 1\cdot\left(\sqrt{16-x^2}\right)\right]$
3.	Procedemos a simplificar lo más que se pueda y encontrar una expresión mas sencilla	$\frac{dy}{dx} = 2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{16}}}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\left[\frac{-2x^2}{2\sqrt{16-x^2}} + \sqrt{16-x^2}\right]$ $\frac{dy}{dx} = 2\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{16-x^2}{16}}}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\left[\frac{-2x^2 + 2(16-x^2)}{2\sqrt{16-x^2}}\right]$ $\frac{dy}{dx} = 2\left(\frac{1}{\frac{\sqrt{16-x^2}}{4}}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\left[\frac{-4x^2+32}{2\sqrt{16-x^2}}\right]$ $\frac{dy}{dx} = 8\left(\frac{1}{\sqrt{16-x^2}}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)(-4)\cdot\frac{(x^2-8)}{2\sqrt{16-x^2}}$ $\frac{dy}{dx} = 8\left(\frac{1}{\sqrt{16-x^2}}\right) + (2)\frac{x^2-8}{2\sqrt{16-x^2}}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{8}{\sqrt{16-x^2}} + \frac{x^2-8}{\sqrt{16-x^2}}$ $\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}}}$

R./

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{\sqrt{16 - x^2}}}$$

i. $\tan(x+y) - x = xe^y + y$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Para encontrar $\frac{dy}{dx}$ derivamos ambos lados de la expresión	$\frac{dy}{dx}(\tan(x+y) - x) = \frac{dy}{dx}(xe^y + y)$ $\sec^2(x+y) \cdot \left(1 + \frac{dy}{dx}\right) - 1 = e^y + xe^y\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx}$
2.	Desarrollamos algunos productos para así después despejar $\frac{dy}{dx}$	$\sec^2(x+y) + \frac{dy}{dx}\sec^2(x+y) - 1 = e^y + xe^y\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx}$ $\frac{dy}{dx}\sec^2(x+y) - xe^y\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} = e^y - \sec^2(x+y) + 1$
3.	Se simplifica la expresión.	$\frac{dy}{dx}(\sec^2(x+y) - xe^y - 1) = e^y - \sec^2(x+y) + 1$
4.	Se procede a despejar $\frac{dy}{dx}$	$\mathbf{\frac{dy}{dx} = \frac{e^y - \sec^2(x+y) + 1}{\sec^2(x+y) - xe^y - 1}}$

$$\mathbf{\frac{dy}{dx} = \frac{e^y - \sec^2(x+y) + 1}{\sec^2(x+y) - xe^y - 1}}$$

b. Utilice la regla de L'hopital para calcular el límite

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(x+1)}\right)$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Primero operamos algebraicamente el límite y lo valuamos para comprobar de qué tipo de forma indeterminada de L'hopital cumple	$= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln(x+1)-x}{x\cdot\ln(x+1)}\right)$ $= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\frac{1}{x+1}-1}{\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}}\right) = \frac{0}{0}$
2.	Al saber que es de la forma $\frac{0}{0}$ procedemos a resolver por medio de L'hopital, derivando numerador y denominador	$= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{-\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{1}{x+1}+\frac{x+1-x}{(x+1)^2}}\right)$
3.	Después de derivar procedemos a valuar para encontrar el limite	$= \frac{-\frac{1}{(0+1)^2}}{\frac{1}{0+1}+\frac{1}{(0+1)^2}} = \frac{-1}{\frac{1}{1}+\frac{1}{1}}$ $= -\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

R./

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(x+1)}\right) = -\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

Tema 2: (10 puntos)

Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = x^{x+2}$, en $x = 1$.

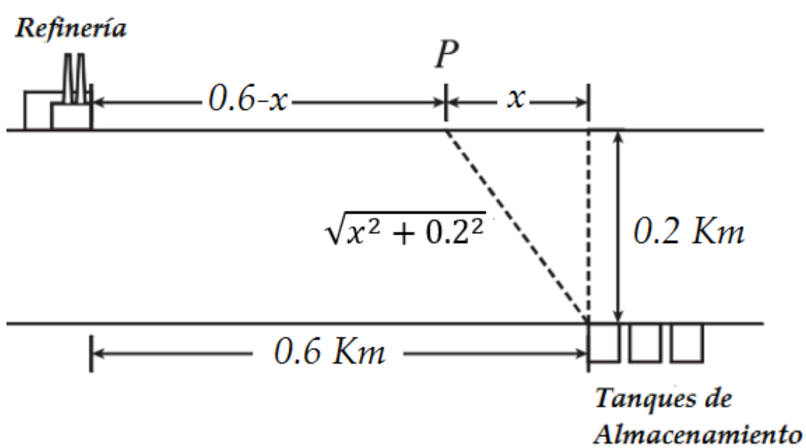
No.	Explicación	Operatoria
1.	Primero debemos derivar la función para poder definir la pendiente de nuestra recta en el punto dado, pero primero debemos aplicar logaritmos para poder derivar.	$\ln y = \ln(x^{x+2})$ $\ln y = (x+2)\ln(x)$
2.	Procedemos a derivar ambos lados de la expresión	$\frac{dy}{dx}(\ln y) = \frac{dy}{dx}[(x+2)\ln(x)]$ $\frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right) = (x+2)\cdot\frac{1}{x} + \ln(x)$ $\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{(x+2)}{x} + \ln(x)\right]$
3.	Después procedemos a sustituir $y = x^{x+2}$	$\frac{dy}{dx} = x^{x+2}\left[\frac{(x+2)}{x} + \ln(x)\right]$
4.	Valuamos la primera derivada en x=1 para encontrar el valor de la pendiente de nuestra recta.	$y'(1) = 1^{2+2}\left[\frac{(1+2)}{1} + \ln(1)\right] = 3 + \ln(1) = \mathbf{3}$
5.	Ya que tenemos nuestros valores de pendiente y de x, procedemos a encontrar los valores de y, para construir nuestra ecuación de la recta.	$x = 1 \to y = 1^{1+2} = 1$
6.	Por ultimo definimos nuestra ecuación de recta tangente	$\boldsymbol{y - 1 = 3(x - 1)}$ o también $\boldsymbol{y = 3x - 2}$

$$\boldsymbol{y-1=3(x-1)} \quad \textbf{o} \qquad \boldsymbol{y=3x-2}$$

Tema 3: (20 puntos)

Una refinería de petróleo se encuentra en la orilla norte de un río recto que tiene 200 metros de ancho. Se debe construir una tubería desde la refinería a los tanques de almacenamiento situados en la orilla sur, 600 metros al este de la refinería. El costo de colocación de la tubería es de $400 por km sobre la tierra desde la refinería hasta un punto *P* sobre la orilla norte y de $800 bajo el río desde el punto *P* hasta los tanques de almacenamiento. Determine donde debe ubicarse el punto *P* de manera que el costo total de la tubería sea mínimo.

Primero hacemos un bosquejo de lo que nos solicitan en el problema



No	EXPLICACION	OPERATORIA
1	Como podemos ver en el bosquejo hay (0.6-x)Km sobre la tierra y $\sqrt{x^2+0.2^2}$ Km bajo el rio y debemos minimizar el costo C de la tubería entonces construimos nuestra ecuación de costo a minimizar.	$C(x) = (0.6-x)(400) + (\sqrt{x^2+0.2^2})(800)$
2	Para minimizar los costos debemos derivar la función de costos y encontrar su mínimo mas bajo	$C'(x) = -400 + 800\left(\frac{1}{2}(x^2+0.2^2)^{-1/2}(2x)\right)$ $C'(x) = -400 + \frac{800x}{\sqrt{x^2+0.2^2}}$

3	Se procede a encontrar los puntos críticos de la función de costos.	$C'(x) = 0$ $0 = -400 + \frac{800x}{\sqrt{x^2 + 0.2^2}}$ $400 = \frac{800x}{\sqrt{x^2 + 0.2^2}}$ $\sqrt{x^2 + 0.2^2} = \frac{800x}{400}$ $\sqrt{x^2 + 0.2^2} = 2x$ $x^2 + 0.2^2 = 4x^2$ $0.04 = 3x^2$ $x^2 = \frac{0.04}{3}$ $\boldsymbol{x = \frac{\sqrt{3}}{15} \cong 0.115}$
4	Se procede a valuar los valores de x $[0 \leq x \leq 0.6]$ Para ver cual nos da el menor costo	$C(0) = (0.6 - 0)(400) + (\sqrt{0 + 0.2^2})(800)$ $C(0) = 400$ $C\left(\frac{\sqrt{3}}{15}\right) = \left(0.6 - \frac{\sqrt{3}}{15}\right)(400) + \left(\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{15}\right)^2 + (0.2)^2}\right)(800)$ $\boldsymbol{C\left(\frac{\sqrt{3}}{15}\right) \cong 378.56}$ $C(0.6) = (0.6 - 0.6)(400) + (\sqrt{(0.6)^2 + 0.2^2})(800)$ $C(0.6) \cong 505.96$
5	Al valuar logramos obtener que el costo mínimo sería de \$378.56 y el punto P debería estar a 0.485 km al este de la refinería.	$\boldsymbol{P = \left(0.6 - \frac{\sqrt{3}}{15}\right) Km \approx 0.485\ Km}$

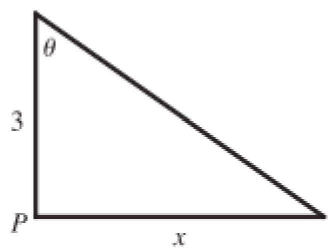
R/

$$\boldsymbol{El\ costo\ minimo\ es\ aproximadamente\ de\ \$378.56\ cuando\ P = 0.485Km}$$

Tema 4: (20 puntos)

Un faro se localiza en una pequeña isla a 3 km del punto más cercano *P* que se encuentra en una playa recta; la lámpara del faro da cuatro revoluciones por revoluciones por minuto. ¿Qué tan rápido se mueve el haz de luz a lo largo de la playa, cuando éste se encuentra a 1.5 km del punto *P?*

Realizar un bosquejo del problema



No.	Explicación	Operación
1.	Primero debemos las revoluciones por minuto a radianes por minuto	$\frac{4\,rev}{min} * \frac{2\pi\ rad}{1\,rev} = 8\pi\ \mathrm{rad/min}$
2.	Eso quiere decir	$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{dt}} = 8\pi\ \mathrm{rad/min}$
3.	Usando trigonometría del triangulo rectangulo	$\tan(\theta) = \frac{x}{3}$ $x = 3\tan(\theta)$ $\frac{dx}{dt} = 3\sec^2(\theta)\frac{d\theta}{dt}$
4.	Valuando en x = 1.5	$\tan(\theta) = \frac{1.5}{3} = \frac{1}{2}$

5.	Utilizando la identidad $\sec^2(\theta) = 1 + \tan^2(\theta)$	$\sec^2(\theta) = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$ $\frac{dx}{dt} = 3\left(\frac{5}{4}\right)(8\pi)$ $\boldsymbol{\frac{dx}{dt} = 30\pi \ \ Km/min \approx 94.25\ Km/min}$

R/

El haz de luz se mueve a 94.25 km/min

Tema 5: (20 puntos)

Dada la función

$$f(x) = 3x^{5/3} - 15x^{2/3}$$

Encuentre los intervalos donde la función es creciente, intervalos donde la función es decreciente, máximos y mínimos relativos, intervalos donde es cóncava hacia arriba, intervalos donde es cóncava hacia abajo, puntos de inflexión. Dibuje la gráfica de la función.

No.	Explicación	Operación
1	Primero encontramos su primera derivada	$f'(x) = 5x^{2/3} - 10x^{-1/3} = 5x^{-1/3}(x-2)$ $f'(x) = \frac{5(x-2)}{x^{1/3}}$
2	Con la primera derivada encontramos sus puntos críticos	$\boldsymbol{5(x-2) = 0 \ ; \quad x^{1/3} = 0}$ $\boldsymbol{x = 2 \quad ; \quad x = 0}$
3	Realizamos una tabla para concluir los intervalos de crecimiento y decrecimiento	(ver tabla siguiente)

	$(-\infty, 0)$	$(0,2)$	$(2, +\infty)$
5(x-2)	-	-	+
$\boldsymbol{x^{1/3}}$	-	+	+
$\frac{5(x-2)}{x^{1/3}}$	+	-	+
CONCLUSION	*CRECE*	*DECRECE*	*CRECE*

<table>
<tr>
<td>4</td>
<td>Después de realizar la tabla podremos concluir</td>
<td>

Intervalos donde la función es Creciente: $(-\infty, 0)$ y $(2, +\infty)$

Intervalos donde la función es Decreciente: $(0,2)$

f Crece y luego Decrece en $\boldsymbol{x = 0}$, por lo que $\boldsymbol{f(0) = 0}$ **es un MÁXIMO RELATIVO**.

f Decrece y luego Crece en $\boldsymbol{x = 2}$, por lo que $\boldsymbol{f(2) \approx -14.29}$ **es un MÍNIMO RELATIVO.**

$\boldsymbol{f'(x)}$ **NO ESTA DEFINIDA EN** $\boldsymbol{x = 0}$. Sin embargo $f(x)$ es Continua en todo su dominio.

</td>
</tr>
<tr>
<td>5</td>
<td>Se procede a encontrar la segunda derivada para definir las concavidades.</td>
<td>

$$f''(x) = \frac{10}{3}x^{-1/3} + \frac{10}{3}x^{-4/3} = \frac{10}{3}x^{-4/3}(x+1)$$

$$f''(x) = \frac{10(x+1)}{3x^{4/3}}$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>6</td>
<td>Encontrando sus puntos críticos</td>
<td>

$$\boldsymbol{10(x+1) = 0 \;;\quad 3x^{4/3} = 0}$$
$$\boldsymbol{x = -1 \quad;\quad x = 0}$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>7</td>
<td>Realizamos una tabla para concluir los intervalos donde la función es cóncava hacia arriba o abajo</td>
<td>
<table>
<tr><th></th><th>$(-\infty, -1)$</th><th>$(-1,0)$</th><th>$(0, +\infty)$</th></tr>
<tr><td>10(x+1)</td><td>-</td><td>+</td><td>+</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{3x^{4/3}}$</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{\frac{10(x+1)}{3x^{4/3}}}$</td><td>-</td><td>+</td><td>+</td></tr>
<tr><td>CONCLUSION</td><td>CONC. ABAJO</td><td>CONC. ARRIBA</td><td>CONC. ARRIBA</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>8</td>
<td>Después de realizar la tabla podremos concluir</td>
<td>

Intervalos donde la función es Cóncava hacia arriba: $(-1,0)$ y $(0, +\infty)$

Intervalos donde la función es Cóncava hacia abajo: $(-\infty, -1)$

El único cambio de concavidad ocurre en $\boldsymbol{x = -1}$**, por lo que hay un PUNTO DE INFLEXIÓN en** $\boldsymbol{(-1, -18)}$

</td>
</tr>
</table>

R/

Intervalos donde la función es Creciente: $(-\infty, 0)$ y $(2, +\infty)$

Intervalos donde la función es Decreciente: $(0,2)$

f Crece y luego Decrece en $\boldsymbol{x = 0}$, por lo que $\boldsymbol{f(0) = 0}$ **es un MÁXIMO RELATIVO**.

f Decrece y luego Crece en $\boldsymbol{x = 2}$, por lo que $\boldsymbol{f(2) \approx -14.29}$ **es un MÍNIMO RELATIVO.**

Intervalos donde la función es Cóncava hacia arriba: $(-1,0)$ y $(0, +\infty)$

Intervalos donde la función es Cóncava hacia abajo: $(-\infty, -1)$

El único cambio de concavidad ocurre en $\boldsymbol{x = -1}$**, por lo que hay un PUNTO DE INFLEXIÓN en** $\boldsymbol{(-1, -18)}$

Grafica de la Función