

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-103-3-V-1-00-2016



CURSO:	Matemática Básica 2
SEMESTRE:	Primero
CÓDIGO DEL CURSO:	103
TIPO DE EXAMEN:	Tercer Examen Parcial
FECHA DE EXAMEN:	Mayo de 2016
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	Luis Maldonado
REVISÓ EL EXAMEN:	Ing. Eder Paz
COORDINADOR:	Ing. José Alfredo González Díaz

TEMA 1(35 puntos)

- a) Demuestre que $\int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$ usando la definición de integral definida con $x_i^* = x_i$
- b) Evalúe la siguiente integral definida interpretándola en términos de áreas:

$$\int_{-4}^4 (x - \sqrt{(16 - x^2)}) dx$$

- c) Evalúe la siguiente integral definida usando el Teorema Fundamental del Cálculo, Parte 2:

$$\int_{-5}^1 |x + 2| dx$$

TEMA 2 (20 puntos).

- a) Obtenga $\int x^3 \sqrt{x^2 + 1} dx$ usando la regla de la sustitución.
- b) Si $f(x) = \int_0^x (1 - t^2) e^{t^2} dt$ ¿sobre qué intervalos es creciente f?

TEMA 3(20 puntos).

Encuentre el área de la región acotada por la curva: $x + y = 0$, y la curva $x = y^2 + 3y$

TEMA 4(25 puntos).

Calcular el volumen del sólido obtenido al girar la región acotada por las siguientes curvas.

$$y^2 = x, \quad x = 2y$$

- a) Cuando la región gira alrededor de la recta $x = 6$, usando método de los cascarones cilíndricos.
- b) Cuando la región gira alrededor de la recta $x = -2$, usando método de la arandela.

Solución de examen

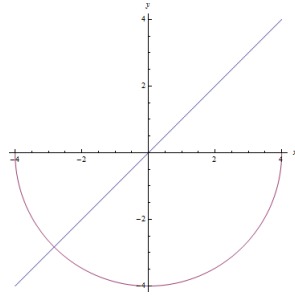
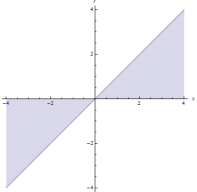
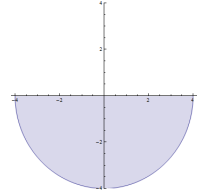
0.1. Tema 1(35 puntos)

a) Demuestre que $\int_a^b x dx = \frac{b^2-a^2}{2}$ usando la definición de integral definida con $x_i^* = x_i$.

No.	Explicación	Operatoria
1	Esta integral se puede expresar como el límite de la suma de Riemann. Se divide el intervalo [a,b] en n subintervalos y se toman como puntos muestra los puntos extremos derechos $x_i^* = x_i$.	$\int_a^b x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$ $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ $x_i = a + \frac{b-a}{n} i$ $f(x_i) = a + \frac{b-a}{n} i$
2	Se sustituye $f(x_i)$ y Δx en el límite.	$\int_a^b x dx =$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(a + \frac{b-a}{n} i \right) \left(\frac{b-a}{n} \right)$
3	Desarrollando el limite anterior se obtiene.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(a \left(\frac{b-a}{n} \right) + \left(\frac{b-a}{n} \right)^2 i \right)$
4	El primer término de la sumatoria es una constante y se sabe que $\sum_{i=1}^n c = nc$. El segundo término se obtiene de la fórmula para la suma de enteros positivos $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a \cancel{n} \left(\frac{b-a}{\cancel{n}} \right) + \left(\frac{b-a}{n} \right)^2 \sum_{i=1}^n i \right)$ $= a(b-a) + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b-a}{n} \right)^2 \left(n \left(\frac{n+1}{2} \right) \right)$ $= ab - a^2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(b-a)^2}{2n} (n+1)$ $= ab - a^2 + \frac{(b-a)^2}{2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(b-a)^2}{2n} \rightarrow 0$
5	Simplificando la expresión se obtiene el resultado indicado.	$\int_a^b x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$ $= ab - a^2 + \frac{b^2 - 2ab + a^2}{2}$ $= \frac{b^2}{2} + \frac{a^2}{2} - a^2 + ab - \frac{2ab}{2}$ $= \frac{b^2 - a^2}{2}$

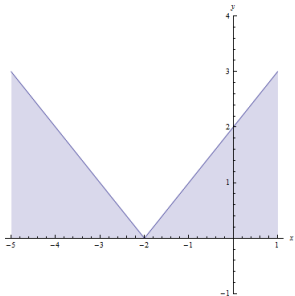
b) Evalúe la siguiente integral definida interpretándola en términos de áreas:

$$\int_{-4}^4 (x - \sqrt{16 - x^2}) dx$$

No.	Explicación	Operatoria
1	Al dibujar las funciones por separado en el mismo sistema coordenado se puede observar que esta formada por una recta y un semicirculo de radio igual a 4.	
2	Dado que f y g son continuas se puede aplicar la siguiente propiedad de las integrales: $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$. Se observa que el área bajo la curva $y = x$ en el intervalo $[-4, 4]$ es una diferencia de areas cuyo resultado es igual a cero. Por otro lado, el área del semicirculo esta dada por $\frac{\pi r^2}{2}$.	$\int_{-4}^4 [x - \sqrt{16 - x^2}] dx =$ $\int_{-4}^4 x dx$  + $\int_{-4}^4 -\sqrt{16 - x^2} dx = \frac{-\pi(4)^2}{2}$ 
3	Por lo tanto el resultado de la integral definida interpretándola en términos de areas es:	$\int_{-4}^4 [x - \sqrt{16 - x^2}] dx = -8\pi$

c) Evalúe la siguiente integral definida usando el Teorema Fundamental del Cálculo, parte 2:

$$\int_{-5}^1 |x + 2| dx$$

No.	Explicación	Operatoria
1	Debido a que $f(x) = x + 2$ es una función por partes la integral se divide en dos. En la gráfica se puede observar el área bajo la curva que se desea encontrar. $f(x) = \begin{cases} -x - 2 & \text{si } x \leq -2 \\ x + 2 & \text{si } x > -2 \end{cases}$ 	$\begin{aligned} & \int_{-5}^1 x + 2 dx \\ &= \int_{-5}^{-2} [-x - 2] dx + \int_{-2}^1 [x + 2] dx \\ &= \left[-\frac{x^2}{2} - 2x \right]_{-5}^{-2} + \left[\frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^1 \\ &= \left[2 - \left(\frac{25}{2} + 10 \right) \right] + \frac{5}{2} - [2 - 4] \\ &= 2 + \frac{25}{2} - 10 + \frac{5}{2} + 2 \\ &= 9 \end{aligned}$

0.2. Tema 2(20 puntos)

a) Obtenga $\int x^3 \sqrt{x^2 + 1} dx$ usando la regla de la sustitución.

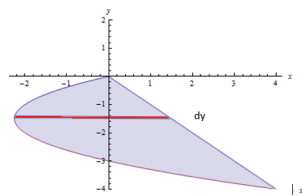
No.	Explicación	Operatoria
1	Se realiza la sustitución $u = x^2 + 1$ y se separa un factor del término x^3 para poder utilizar la regla de la sustitución.	$\int x^3 \sqrt{x^2 + 1} dx \quad u = x^2 + 1$ $= \int x^2 x \sqrt{x^2 + 1} dx \quad du = 2x dx$
2	Sustituyendo la nueva variable y el diferencial en la integral se obtiene.	$x^2 = u - 1$ $x dx = \frac{du}{2}$ $\int x^2 x \sqrt{x^2 + 1} dx = \int \frac{(u-1)\sqrt{u}}{2} du$ $= \int \frac{1}{2} (u^{3/2} - u^{1/2}) du$
3	Ahora se puede encontrar un antiderivada de la forma $\int u^n dx = \frac{u^{n+1}}{n+1}$ para $n \neq -1$. Y por último se retorna a la variable x.	$\int \frac{1}{2} (u^{3/2} - u^{1/2}) du = \frac{1}{2} \left(\frac{2u^{5/2}}{5} - \frac{2u^{3/2}}{3} \right) + C$ $= \frac{u^{5/2}}{5} - \frac{u^{3/2}}{3} + C$ $= \frac{1}{5} (x^2 + 1)^{5/2} - \frac{1}{3} (x^2 + 1)^{3/2} + C$

b) Si $f(x) = \int_0^x (1 - t^2) e^{t^2} dt$ ¿sobre qué intervalos es creciente f?

No.	Explicación	Operatoria												
1	Aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo, parte 1 se obtiene:	$f(x) = \int_0^x (1 - t^2) e^{t^2} dt$ $f'(x) = (1 - x^2) e^{x^2}$												
3	Se determinan los puntos críticos resolviendo $f'(x) = 0$	$(1 - x^2) e^{x^2} = 0$ $1 - x^2 = 0$ $x = \pm 1$												
4	Se evalúa $f'(x)$ en cada intervalo. f(x) es creciente en los intervalos cuya pendiente es positiva, es decir, cuando $f'(x) > 0$.	$f'(-2) = -3e^4$ $f'(0) = 1$ $f'(2) = -3e^4$ <table border="1" style="margin-top: 10px;"> <thead> <tr> <th>Intervalo</th><th>$f'(x)$</th><th>f</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>$(-\infty, -1)$</td><td>-</td><td>decreciente</td></tr> <tr> <td>$(-1, 1)$</td><td>+</td><td>creciente</td></tr> <tr> <td>$(1, \infty)$</td><td>-</td><td>decreciente</td></tr> </tbody> </table>	Intervalo	$f'(x)$	f	$(-\infty, -1)$	-	decreciente	$(-1, 1)$	+	creciente	$(1, \infty)$	-	decreciente
Intervalo	$f'(x)$	f												
$(-\infty, -1)$	-	decreciente												
$(-1, 1)$	+	creciente												
$(1, \infty)$	-	decreciente												
5	Por lo tanto, f(x) es creciente en el intervalo:	$(-1, 1)$												

0.3. Tema 3 (20 puntos)

Encuentre el área de la región acotada por la curva: $x + y = 0$, y la curva $x = y^2 + 3y$.

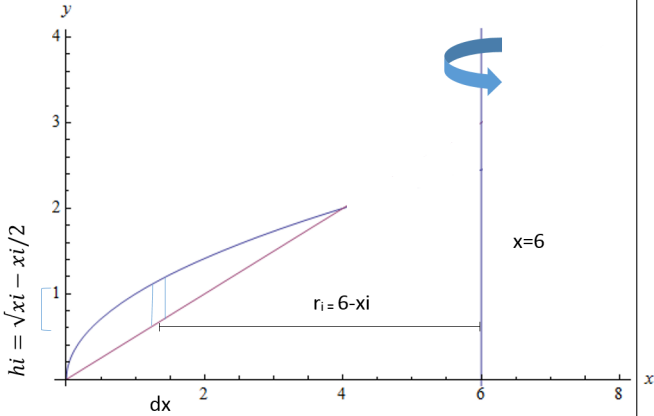
No.	Explicación	Operatoria
1	Primero se determinan los puntos de intersección entre las funciones. Por facilidad se despeja x de la primera función y se iguala a la segunda.	$-y = y^2 + 3y$ $y(y + 4) = 0$ Puntos de intersección: $y_1 = 0 \quad y_2 = -4$ $x_1 = 0 \quad x_2 = 4$
2	Se muestra la gráfica de la región resultante. Para determinar el área se utilizan diferenciales de y .	
3	El largo de cada diferencial es igual a la diferencia entre las curvas $x = -y$ y $x = y^2 + 3y$. Luego, el área de cada diferencial es igual a su largo l_i por el ancho Δy . Y sumando todos los diferenciales de área A_i conforme $\Delta y \rightarrow 0$ se determina el área total entre las curvas en el intervalo $-4 \leq y \leq 0$.	$A_i = l_i * \Delta y$ $A_i = [-y - (y^2 + 3y)]\Delta y$ $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A_i$ $A = \int_{-4}^0 [-y - (y^2 + 3y)]dy$
4	Resolviendo la integral se obtiene:	$A = \int_{-4}^0 [-y^2 - 4y]dy$ $A = \left[\frac{-y^3}{3} - 2y^2 \right]_{-4}^0$ $A = - \left[\frac{64}{3} - 32 \right]$ $A = \frac{32}{3}u^2$

0.4. Tema 4 (25 puntos)

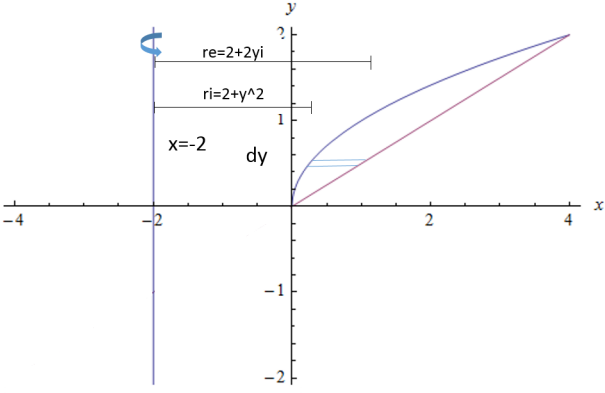
Calcular el volumen del sólido obtenido al girar la región acotada por las siguientes curvas.

$$y^2 = x, \quad x = 2y$$

a) Cuando la región gira alrededor de la recta $x = 6$, usando método de los cascarones cilíndricos.

No.	Explicación	Operatoria
1	EL primer paso es encontrar los puntos de intersección entre las curvas. La región entre las curvas se muestra en la figura.	$y^2 = 2y$ $y(y - 2) = 0$ Puntos de intersección: $y_1 = 0 \quad y_2 = 2$ $x_1 = 0 \quad x_2 = 4$ 
2	Para determinar el volumen por el método de cascarones cilíndricos se encuentra el radio de revolución y la altura de los diferenciales. Recordar que los diferenciales son paralelos al eje de rotación.	$r_i = 6 - x_i$ $h_i = \sqrt{x_i} - x_i/2$ $V = \int_0^4 2\pi(6 - x)(\sqrt{x} - x/2)dx$
3	Resolviendo la integral se obtiene:	$V = 2\pi \int_0^4 \left[6x^{1/2} + 3x - x^{3/2} + \frac{x^2}{2} \right] dx$ $V = 2\pi \left[4x^{3/2} - \frac{3x^2}{2} - \frac{2x^{5/2}}{5} + \frac{x^3}{6} \right]_0^4$ $V = 2\pi \left(32 - 24 - \frac{64}{5} + \frac{64}{6} \right)$ $V = \frac{176\pi}{15} u^3$

b) Cuando la región gira alrededor de la recta $x = -2$, usando el método de la arandela.

No.	Explicación	Operatoria
1	Por el método de la arándela los diferenciales son perpendiculares al eje de rotación ($x = -2$). El radio exterior es igual a la distancia de la curva $y = \frac{x}{2}$ al eje de rotación y el radio interior es igual a la distancia de la curva $y = \sqrt{x}$ al eje de rotación.	 $r_e = 2 + 2y_i$ $r_i = 2 + y_i^2$ $V = \int_0^2 \pi [(2 + 2y_i)^2 - (2 + y_i^2)^2] dy$
3	Resolviendo la integral se obtiene:	$V = \pi \int_0^2 4 + 8y + 4y^2 - 4 - 4y^2 - y^4 dy$ $V = \pi \int_0^2 (-y^4 + 8y) dy$ $V = \pi \left[\frac{-y^5}{5} + 4y^2 \right]_0^2$ $V = \frac{48\pi}{5} u^3$