UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE 103-2-V-1-00-2018

Curso:	**Matemática Básica 2**
Semestre :	**Primero**
Código del curso:	**103**
Tipo de examen:	**Segundo parcial**
Fecha de examen :	**13 de Marzo de 2018**
Resolvió el examen	**Heather Salamanca**
Digitalizó el examen:	**Heather Salamanca**
Coordinador:	**Ing. José Alfredo González Díaz**

Universidad de San Carlos de Guatemala **Matemática Básica 2**
Facultad de Ingeniería **Jornada Vespertina**
Departamento de matemática **13 de marzo de 2018**

Segundo examen parcial

Temario V

Tema 1: (30 puntos)

a. Encuentre $\dfrac{dy}{dx}$ por derivación implícita

$$\operatorname{sen}(xy^2) = \sqrt{x+y}$$

b. Calcule la primera derivada en la función

$$y = \tan^{-1}\left(x - \sqrt{1+x^2}\right)$$

c. Usar derivación logarítmica para hallar la derivada de

$$y = (\operatorname{sen} x)^{\ln x}$$

Tema 2: (17 puntos)

Los lados de un triángulo tienen longitudes de 12 cm y 15 cm. El ángulo entre ellos se incrementa a razón de 0.25 radianes por minuto. ¿Qué tan rápido se incrementa la longitud del tercer lado cuando el ángulo entre los lados de longitud fija es de 60^o?

Tema 3: (15 puntos)

Halle los valores extremos absolutos de la función $f(x) = \sqrt[3]{x}\,(8-x)$ en el intervalo $[0, 8]$

Tema 4: (15 puntos)

Halle el límite usando la regla de L´Hopital donde resulte válido:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x}$$

Tema 5: (23 puntos)

Encontrar los intervalos sobre los cuales la función es creciente o decreciente, máximos y mínimos relativos, intervalos donde la función es cóncava hacia arriba, intervalos donde la función es cóncava hacia abajo, puntos de inflexión. Dibuje la gráfica de la función.

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2+3}$$

TEMA NO.1

a. Encuentre $\frac{dy}{dx}$ por derivación implícita

$$\operatorname{sen}(xy^2) = \sqrt{x+y}$$

Solución

Explicación	**Operatoria**
Se derivará la función por derivación implícita, utilizando la siguiente notación	$$\frac{dy}{dx} = y^{\prime}$$
Se derivará la igualdad con respecto a x en ambos lados	$$\frac{d}{dx}(sen(xy^2) = \frac{d}{dx}(\sqrt{x+y})$$ $$\cos(xy^2)\left(y^2 + 2y\frac{dy}{dx}x\right) = \frac{1}{2}(x+y)^{-\frac{1}{2}} * \left(1 + \frac{dy}{dx}\right)$$ $$\cos(xy^2)\left(y^2 + 2yy^{\prime}x\right) = \frac{1}{2}(x+y)^{-1/2} * (1 + y^{\prime})$$
Acomodando la expresión	$$cos(xy^2)(y^2) + cos(xy^2)(2yy^{\prime}x) = \frac{1}{2}(x+y)^{-1/2} + \frac{1}{2}(x+y)^{-1/2}y^{\prime}$$ $$cos(xy^2)(2yy^{\prime}x) - \frac{1}{2}(x+y)^{-\frac{1}{2}}y^{\prime} = \frac{1}{2}(x+y)^{-\frac{1}{2}} - cos(xy^2)(y^2)$$ $$y^{\prime}\left[cos(xy^2)(2yx) - \frac{1}{2}(x+y)^{-\frac{1}{2}}\right] = \frac{1}{2}(x+y)^{-\frac{1}{2}} - cos(xy^2)(y^2)$$
Despejando $y^{\prime}$	$$y^{\prime} = \frac{\frac{1}{2}(x+y)^{-\frac{1}{2}} - cos(xy^2)(y^2)}{cos(xy^2)(2yx) - \frac{1}{2}(x+y)^{-\frac{1}{2}}}$$

Respuesta:

$$y^{\prime} = \frac{\frac{1}{2}(x+y)^{-\frac{1}{2}} - cos(xy^2)(y^2)}{cos(xy^2)(2yx) - \frac{1}{2}(x+y)^{-\frac{1}{2}}}$$

b. Calcule la primera derivada en la función

$$y = \tan^{-1}\left(x - \sqrt{1 + x^2}\right)$$

Solución

Explicación	**Operatoria**
Se encontrara la primera derivada de la función aplicando la derivada de tan^{-1}(x)	$\frac{d}{dx}(tan^{-1}(u) = \frac{1}{1+u^2} * \frac{du}{dx}$
Por lo tanto, aplicándolo a la función se tiene que	$u = (x - \sqrt{1+x^2})$ $\frac{d}{dx}(tan^{-1}(u) = \frac{1}{1+\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)^2} * \frac{du}{dx}(x - (1+x^2)^{1/2}$
Derivando el segundo término se obtiene	$\frac{du}{dx}(x - (1+x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2} * (1+x^2)^{-1/2} * 2x\right)$
Sustituyéndolo en la expresión inicial	$\frac{d}{dx}(tan^{-1}(u) = \frac{1}{1+\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)^2} * \left[1 - \left(\frac{1}{2} * (1+x^2)^{-1/2} * 2x\right)\right]$
Simplificando la expresión	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)^2} * (1 - x(1+x^2)^{-1/2})$

Respuesta:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1 - x(1+x^2)^{-1/2})}{1+\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)^2}$$

c. Usar derivación logarítmica para hallar la derivada de

$$y = (\operatorname{sen} x)^{\ln x}$$

Solución

Explicación	**Operatoria**
Derivamos la función mediante derivación logarítmica utilizando la siguiente propiedad $Ln(a^b) = b * Ln(a)$	$y = (senx)^{Lnx}$ $Lny = Lnx * Ln(senx)$
Derivamos la igualdad con respecto a x de ambos lados	$\frac{d}{dx}(Lny) = \frac{d}{dx}(Lnx * Ln(senx)$
Derivando el primer término se tiene que:	$\frac{d}{dx}(Lny) = \frac{1}{y} * y^{\prime}$
Derivando el segundo término se tiene que: *Se aplica la derivada de un producto	$\frac{d}{dx}(Lnx * Ln(senx) = Lnx * \frac{1}{senx} * cosx + Ln(senx) * \frac{1}{x}$
Simplificando la expresión	$\frac{1}{y} * y^{\prime} = Lnx * \frac{cosx}{senx} + \frac{Ln(senx)}{x}$
Despejando $y^{\prime}$	$y^{\prime} = \left[Lnx * \frac{cosx}{senx} + \frac{Ln(senx)}{x}\right] * y$

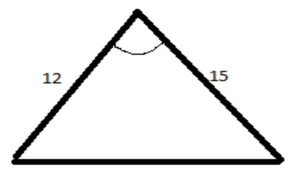
Respuesta:

$$y^{\prime} = \left[Lnx * \frac{cosx}{senx} + \frac{Ln(senx)}{x}\right] * y$$

TEMA NO.2

Los lados de un triángulo tienen longitudes de 12 cm y 15 cm. El ángulo entre ellos se incrementa a razón de 0.25 radianes por minuto. ¿Qué tan rápido se incrementa la longitud del tercer lado cuando el ángulo entre los lados de longitud fija es de 60^o?

Solución

Explicación	**Operatoria**
Utilizaremos la ley de cosenos para encontrar la longitud del tercer lado del triángulo Donde: a= 12 cm b= 15 cm c= tercer lado del triángulo θ= ángulo entre a y b	 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab * cos\theta$
Sustituyendo los valores fijos que ya se tienen se obtiene el lado c en términos del ángulo entre a y b	$c^2 = 12^2 + 15^2 - (2 * 12 * 15) * cos\theta$ $c^2 = 369 - 360 * cos\theta$ $c = \sqrt{369 - 360 * cos\theta}$
El problema nos pide la razón de cambio del lado c del triángulo cuando el ángulo entre a y b es 60° y este se incrementa a razón de 0.25 radianes por minuto *Nota: se deben convertir los 60° a radianes.	$\frac{dc}{dt} = ?$ Cuando $\theta = \frac{\pi}{3}\ y\ \frac{d\theta}{dt} = 0.25\ rad/min$
Se procede a derivar el lado c con respecto al tiempo	$c = (369 - 360 * cos\theta)^{1/2}$ $\frac{dc}{dt} = \frac{360 * sen\theta}{2\sqrt{369 - 360 * cos\theta}} * \frac{d\theta}{dt}$

Se evalúan los datos planteados por el problema	$$\frac{dc}{dt} = \frac{360 * sen(\frac{\pi}{3})}{2\sqrt{369 - 360 * cos(\frac{\pi}{3})}} * (0.25\frac{rad}{min})$$ $$\frac{dc}{dt} = 2.83\ cm/min$$

Respuesta: La longitud del tercer lado del triángulo se incrementa a una razón de 2.83 cm/min.

$$\frac{dc}{dt} = 2.83\ cm/min$$

TEMA NO.3

Halle los valores extremos absolutos de la función $f(x) = \sqrt[3]{x}\,(8 - x)$ en el intervalo $[0, 8]$

Solución

Explicación	**Operatoria**
Primero debemos encontrar la primera derivada de la función *Se aplica la derivada de un producto	$$f(x) = \sqrt[3]{x}(8 - x)$$ $$f(x) = \left(x^{\frac{1}{3}}\right) * (8 - x)$$ $$f(x)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} * (8 - x) + \left(x^{\frac{1}{3}}\right) * (-1)$$
Simplificando la expresión anterior	$$f(x)' = \frac{-4x + 8}{3x^{2/3}}$$

<table>
<tr><td>Luego se hallan los puntos críticos de la función, los cuales se encuentran igualando la primera derivada a 0</td><td>

$$f(x)' = \frac{-4x+8}{3x^{2/3}} = 0$$

$$-4x + 8 = 0$$

$$-4x = -8$$

$$x = \left(\frac{-8}{-4}\right)$$

$$x = 2$$

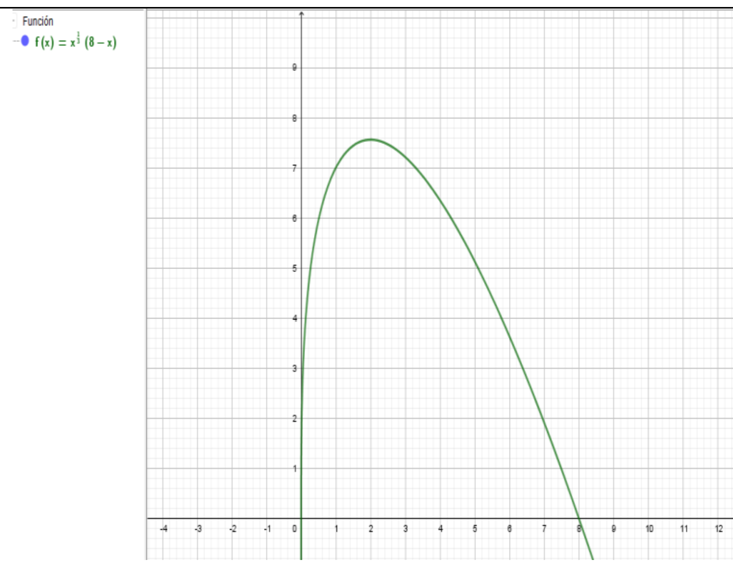
</td></tr>
<tr><td>Podemos ver que el valor 2 se encuentra en el intervalo cerrado de $[0,8]$, por lo tanto podemos aceptar ese valor</td><td>

$$x = 2$$

</td></tr>
<tr><td>Luego evaluamos los valores extremos del intervalo (0,8) y el punto crítico en la función, para obtener nuestro valores extremos absolutos en el intervalo dado.</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>$f(x) = \sqrt[3]{x}(8-x)$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>2</td><td>7.55</td></tr>
<tr><td>8</td><td>0</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>Concluimos que los valores extremos absolutos de la función son

Máximo absoluto

f(2)= 7.55

La función no posee un mínimo absoluto, lo cual podemos observar en la siguiente gráfica</td><td>


</td></tr>
</table>

Respuesta: El valor extremo absoluto de la función

$$f(x) = \sqrt[3]{x}(8-x)$$

es $f(2) = 7.55$ (Máximo absoluto)

TEMA NO.4

Halle el límite usando la regla de L´Hopital donde resulte válido:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x}$$

Solución

Explicación	**Operatoria**
Primero se toma el logaritmo natural de la función	$f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x}$ $Lnf(x)=\lim_{x\to\infty}\left(\text{Ln}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x}\right)$ $Lnf(x)=3x\lim_{x\to\infty}\left(\text{Ln}\left(1+\frac{2}{x}\right)\right)$
Reacomodamos la expresión de la siguiente manera	$Lnf(x)=3\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\text{Ln}\left(1+\frac{2}{x}\right)\right)}{x^{-1}}$
Se aplica la regla de L´Hopital, para la cual se deriva tanto el numerador como el denominador	$Lnf(x)=3\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{-2}{x(x+2)}\right)}{-x^{-2}}$
Simplificando la expresión	$Lnf(x)=3\lim_{x\to\infty}\frac{2}{1+\frac{2}{x}}$
Evaluando el límite *Recordando $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^n}\right)=0, donde\ n=1,2,3\ldots$	$Lnf(x)=3\lim_{x\to\infty}\frac{2}{1+\frac{2}{x}}=\frac{3*2}{1+0}=6$
Por último se emplea el numero natural “e” para eliminar el logaritmo natural	$Lnf(x)=6$ $f(x)=e^6$
Por lo tanto se tiene	$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x}=e^6$

Respuesta:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x}=e^6$$

TEMA NO.5

Encontrar los intervalos sobre los cuales la función es creciente o decreciente, máximos y mínimos relativos, intervalos donde la función es cóncava hacia arriba, intervalos donde la función es cóncava hacia abajo, puntos de inflexión. Dibuje la gráfica de la función.

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 3}$$

Solución

Explicación	**Operatoria**
Para encontrar los intervalos donde la función es creciente o decreciente, se debe encontrar la primera derivada de la función	$f(x) = \frac{x^2}{x^2+3}$ $f(x)' = \frac{6x}{(x^2+3)^2}$
Luego se necesita encontrar los puntos críticos de la función, estos se encuentran igualando la primera derivada a 0	$f(x)' = \frac{6x}{(x^2+3)^2} = 0$ $\frac{6x}{(x^2+3)^2} = 0$ $6x = 0$ $x = 0$ (Punto crítico)
Se establecen los intervalos, luego se escoge un valor de prueba en cada intervalo y se evalúa ese valor en $f(x)'$ para poder conocer su signo	<table><tr><td>Intervalo</td><td>$(-\infty, 0)$</td><td>$(0,\infty)$</td></tr><tr><td>Valor de prueba</td><td>-2</td><td>2</td></tr><tr><td>Signo</td><td>-</td><td>+</td></tr></table>
Se sabe la siguiente condición: f´(x)>0 creciente f´(x)<0 decreciente Por lo tanto	Creciente: $(0,\infty)$ Decreciente: $(-\infty, 0)$

Respuesta:

Intervalos de la función

Creciente: $(0,\infty)$

Decreciente: $(-\infty, 0)$

Explicación	Operatoria
Para conocer los extremos relativos se deben de valuar los puntos críticos en f(x)	$f(x) = \frac{x^2}{x^2+3}$ $f(0) = \frac{0^2}{0^2+3}$ $f(0) = 0$
Por lo tanto	$f(0) = 0\ mínimo\ relativo$

Respuesta:

$f(0) = 0\ mínimo\ relativo$

Explicación	Operatoria
Para encontrar los intervalos donde la función es cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo, es necesario conocer $f(x)''$	$f(x) = \frac{x^2}{x^2+3}$ $f(x)'' = \frac{18(-x^2+1)}{(x^2+3)^3}$
Para saber los intervalos se debe igualar $f(x)''$ a 0 y encontrar los puntos críticos	$f(x)'' = \frac{18(-x^2+1)}{(x^2+3)^3} = 0$ $\frac{18(-x^2+1)}{(x^2+3)^3} = 0$ $18(-x^2+1) = 0$ $-18x^2 + 18 = 0$ $x^2 = \frac{-18}{-18}$ $x = \pm\sqrt{1}$ $x = \pm 1$

Se establecen los intervalos, se escoge un valor de prueba en cada intervalo y se evalúa dicho valor en f´´(x) para poder conocer su signo	<table><tr><td>Intervalo</td><td>$(-\infty,-1)$</td><td>(-1,1)</td><td>$(1,\infty)$</td></tr><tr><td>Valor de prueba</td><td>-2</td><td>0</td><td>2</td></tr><tr><td>Signo</td><td>-</td><td>+</td><td>-</td></tr></table>
Se sabe la siguiente condición: f´´(x)>0 concavidad arriba f´´(x)<0 concavidad abajo Por lo tanto	Cóncava hacia arriba (-1,1) Cóncava hacia abajo $(-\infty,-1)\ y\ (1,\infty)$

Respuesta:

Cóncava hacia arriba (-1,1)

Cóncava hacia abajo $(-\infty,-1)\ y\ (1,\infty)$

Explicación	**Operatoria**
Teniendo los puntos críticos de la segunda derivada de f(x), se elige un número menor y mayor a cada una de las raíces de la segunda derivada	<table><tr><td>Punto Crítico</td><td>-1</td><td>1</td></tr><tr><td>No. Menor</td><td>-2</td><td>0.5</td></tr><tr><td>No. Mayor</td><td>0</td><td>2</td></tr></table>
Evaluamos dichos números en f´´(x)	<table><tr><td>No.</td><td>-2</td><td>0</td><td>0.5</td><td>2</td></tr><tr><td>f´´(x)</td><td>-0.15</td><td>0.6</td><td>0.39</td><td>-0.15</td></tr></table>
Aplicamos el criterio de punto de inflexión Si f´´(x) cambia de signo al pasar por una raíz de f´´(x) entonces tenemos un punto de inflexión	x= -1 x= 1 Son puntos de inflexión
Por último encontramos las coordenadas del punto de inflexión, evaluando los puntos de inflexión en la	$f(x)=\frac{x^2}{x^2+3}$

función f(x)	$f(-1) = \frac{(-1)^2}{(-1)^2 + 3}$ $f(-1) = 0.25$ $f(1) = \frac{(1)^2}{(1)^2 + 3}$ $f(1) = 0.25$

Respuesta:

Puntos de inflexión

$$f(-1) = 0.25$$

$$f(1) = 0.25$$

Gráfica