UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-103-3-M-1-00-2015

CURSO:	**Matemática Básica 2**
SEMESTRE:	**Primero**
CÓDIGO DEL CURSO:	**103**
TIPO DE EXAMEN:	**Tercer Examen Parcial**
FECHA DE EXAMEN:	**29 de abril de 2015**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Fabelio Ajtun**
REVISO EL EXAMEN:	**Lic. Francisco de la Rosa**
COORDINADOR:	**Ing. José Alfredo González Díaz**

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
FACULTAD DE INGENIERIA
MATEMATICA BASICA 2 29 de abril de 2015

TERCER PARCIAL **Temario AAA**

TEMA No. 1 (20 pts.)

Considere el sólido limitado por las gráficas de las ecuaciones $\boldsymbol{y = x^2 + 1}$ y $\boldsymbol{y = 9 - x^2}$
Determine los siguientes incisos:

a) Determine el área limitada por la intersección de las dos curvas
b) Encuentre el volumen del solido obtenido al hacer girar la región delimitada por las curvas alrededor de la recta $\boldsymbol{y = -1}$.

TEMA No. 2 (40 pts.)

Para los siguientes incisos, resuelva lo que se le pide:

a) Evalúe la integral $\boldsymbol{\int_1^4 (x^2 - 4x + 2)dx}$ Como el límite de una suma de Riemann

b) Resuelva $\boldsymbol{\int_{-5}^{5} \left(x - \sqrt{25 - x^2}\right)dx}$, interpretando en términos de área.

c) Calcular $\boldsymbol{\int \frac{dx}{cos^2x \ \sqrt{1+tanx}}}$

d) Si $\boldsymbol{y = \int_{\sqrt{x}}^{2x} arctant \ dt}$ obtenga $\boldsymbol{\frac{dy}{dx}}$

TEMA No. 3 (20 pts.)

Utilice el método de Newton para encontrar una raíz de la ecuación

$$\mathbf{sen}\, \boldsymbol{x = x^2 - 2}$$

TEMA No. 4 (20 pts.)

a) La base de un sólido es la región limitada por las parábolas $\boldsymbol{y = x^2}$ y $\boldsymbol{y = 2 - x^2}$**.** Encuentre el volumen del sólido si las secciones transversales perpendiculares al eje $\boldsymbol{x}$ son cuadrados y uno de sus lados coincide con la base.

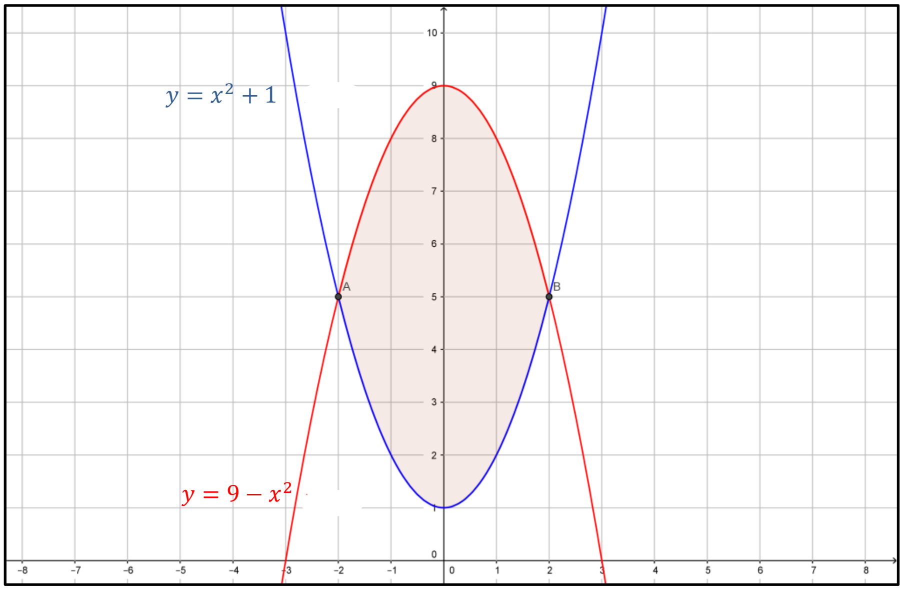
UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
FACULTAD DE INGENIERIA
MATEMATICA BASICA 2 29 de abril de 2015

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

Tema 1: (20 pts.)

Considere el sólido limitado por las gráficas de las ecuaciones $\boldsymbol{y = x^2 + 1}$ y $\boldsymbol{y = 9 - x^2}$
Determine los siguientes incisos:

a) Determine el área limitada por la intersección de las dos curvas



Grafica 1: Área limitada por la intersección de las dos curvas

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se igualan ambas funciones para encontrar los puntos de intersección de las gráficas.	$x^2 + 1 = 9 - x^2$
2.	Se despeja la variable x pasando a restar 1 al lado derecho y pasando a sumar la x^2 del lado derecho al lazo izquierdo de la igualdad.	$2x^2 = 8$
3.	Se dividen ambos lados de la igualdad por 2 para seguir despejando la variable x.	$x^2 = 4$
4.	Se saca raíz cuadrada a ambos lados de la ecuación; y con esto se determinan los puntos de intersección sobre el eje x, los cuales se utilizaran para determinar los límites de la región limitada por la intersección de las dos curvas.	$x = \pm 2$

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

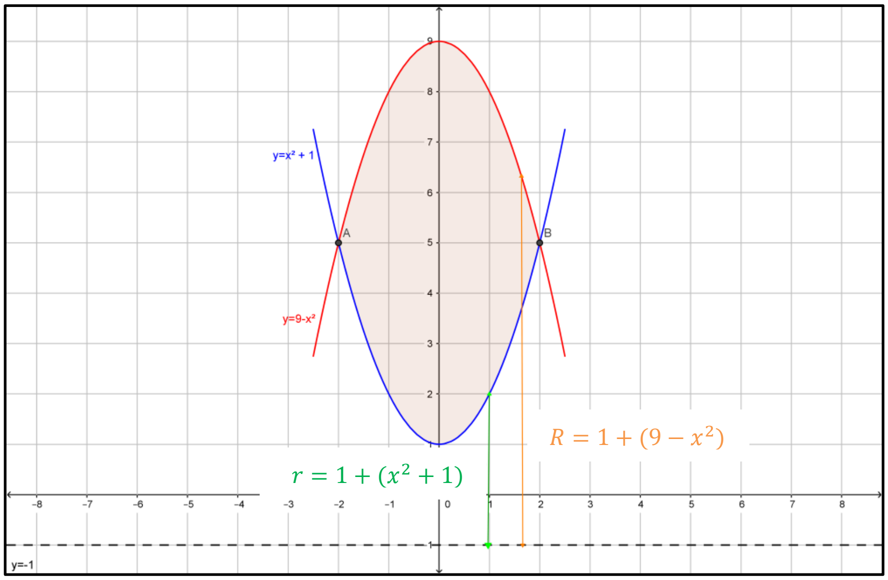
FACULTAD DE INGENIERIA

MATEMATICA BASICA 2 29 de abril de 2015

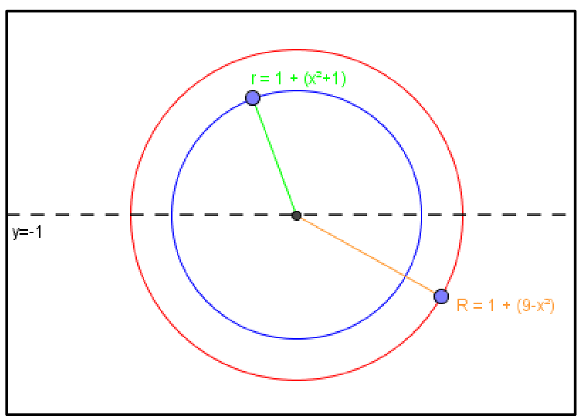
5.	Se plantea la integral que se utilizara para determinar el área limitada por la intersección de las dos curvas.	$\int_{-2}^{2} (9 - x^2) - (x^2 + 1)\, dx$
6.	Se simplifica la expresión realizando la resta de ambas funciones. Además al ser una funciones par $[f(-x) = f(x)]$ se cambian los límites de la integral, para facilitar su cálculo, utilizando la definición de integrales de funciones simétricas: $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\, dx$	$2\int_{0}^{2} (8 - 2x^2)\, dx$
7.	Se saca factor común 2 de la expresión obtenida en el paso anterior.	$4\int_{0}^{2} (4 - x^2)\, dx$
8.	Se integra la función obtenida.	$4\left(4x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big\|_{0}^{2}$
9.	Se evalúan los límites en la función obtenida luego de realizar la integración de la función original.	$A = 4\left(8 - \frac{8}{3}\right) = \frac{64}{3}u^2$

R// El área limitada por la intersección de las dos curvas es $\frac{64}{3}u^2$

b) Encuentre el volumen del solido obtenido al hacer girar la región delimitada por las curvas alrededor de la recta $y = -1$.



Grafica 2: Distancias entra la recta $y = -1$ y cada una de las ecuaciones.



Grafica 3: Sección transversal, perpendicular al eje x, del solido obtenido al girar la región limitada respecto a la recta $y = -1$

No.	Explicación	Operatoria
1.	En la gráfica 3 se observa que el área de una región transversal del solido obtenido, es un anillo con radios $\boldsymbol{r = 1 + (x^2 + 1)}$ y $\boldsymbol{R = 1 + (9 - x^2)}$. Por lo cual el área de la región se expresa como la resta del área mayor menos el área menor.	$A_t = A_R - A_r$ $A_t = \pi R^2 - \pi r^2$ $A_t = \pi(10 - x^2)^2 - \pi(x^2 + 2)^2$
2.	Se saca como factor común el valor de π y se desarrollan exponentes al cuadrado.	$A_t = \pi[100 - 20x^2 + x^4 - (x^2 + 4x^2 + 4)]$

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERIA

MATEMATICA BASICA 2 29 de abril de 2015

3.	Se simplifica la expresión.	$A_t = \pi(96 - 24x^2)$
4.	Se saca factor común 24	$A_t = 24\pi(4 - x^2)$
5.	Se plantea la integral que se utilizara para calcular el volumen del solido de revolución.	$V = \int_{-2}^{2} A_t(x)dx$
6.	Se sustituyen los valores.	$V = \int_{-2}^{2} [24\pi(4 - x^2)]dx$
7.	Se sacan los valores constantes de la integral.	$V = 24\pi \int_{-2}^{2} (4 - x^2)dx$
8.	Al igual que con el inciso a, se cambian los valores de la integral, para facilitar el cálculo, ya que se está integrando una función par $[f(-x) = f(x)]$: $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$	$V = 48\pi \int_{0}^{2} (4 - x^2)dx$
9.	Se integra la función obtenida.	$V = 48\pi \left(4x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big\|_0^2$
10.	Se evalúan los límites en la función obtenida luego de realizar la integración de la función original.	$V = 48\pi \left(8 - \frac{8}{3}\right) = 256\pi\ u^3$

R//
El volumen del solido obtenido al hacer girar la región delimitada por las curvas alrededor de la recta y = -1 es de $\boldsymbol{256\pi\ u^3}$

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
FACULTAD DE INGENIERIA
MATEMATICA BASICA 2 29 de abril de 2015

Tema 2: (40 pts.)

a) Evalúe la integral $\int_1^4 (x^2 - 4x + 2)dx$ Como el límite de una suma de Riemann

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se obtiene Δx	$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-1}{n} = \frac{3}{n}$
2.	Se obtiene x_i	$x_i = a + \Delta x_i = 1 + \frac{3}{n}i$
3.	La función que se desea integrar se evalúa en x_i	$f(x) = x^2 - 4x + 2$ $f(x_i) = \left(1 + \frac{3}{n}i\right)^2 - 4\left(1 + \frac{3}{n}i\right) + 2$
4.	Se desarrolla la función para luego ser simplificada.	$f(x_i) = \frac{9}{n^2}i^2 - \frac{6}{n}i - 1$
5.	Se sustituye la función $f(x_i)$ en la sumatoria de Riemann	$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ $\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{9}{n^2}i^2 - \frac{6}{n}i - 1\right)\left(\frac{3}{n}\right)\right]$
6.	Se aplica la propiedad distributiva.	$\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{9}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2 - \frac{6}{n}\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} 1\right)\left(\frac{3}{n}\right)\right]$
7.	Conociendo que: $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ y $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$, se sustituyen en el límite.	$\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{9}{n^2} * \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{6}{n} * \frac{n(n+1)}{2} - n\right)\left(\frac{3}{n}\right)\right]$
8.	Simplificando la expresión.	$\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{3}{n} * \frac{(n+1)(2n+1)}{2} - 3*(n+1) - n\right)\left(\frac{3}{n}\right)\right]$
9.	Desarrollando la expresión.	$\lim_{n\to\infty}\left[\left(3n + \frac{9}{2} + \frac{3}{2n} - 3n - 3 - n\right)\left(\frac{3}{n}\right)\right]$

10.	Simplificando la expresión.	$\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{2n}-n\right)\left(\frac{3}{n}\right)\right]$
11.	Operando ambos paréntesis.	$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{9}{2n}+\frac{9}{2n^2}-3\right) = -3$

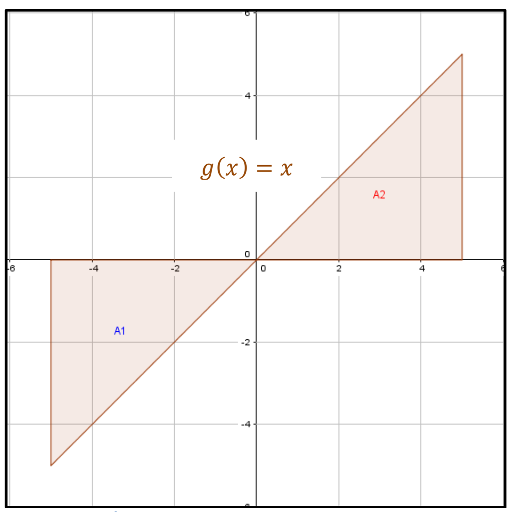
R// $\boldsymbol{\int_1^4 (x^2 - 4x + 2)dx = -3}$

b) Resuelva $\boldsymbol{\int_{-5}^{5}\left(x-\sqrt{25-x^2}\right)dx}$, interpretando en términos de área.
Para resolver la integral interpretándola como términos de área, se debe tomar la función a integrar como la suma de dos funciones independientes.

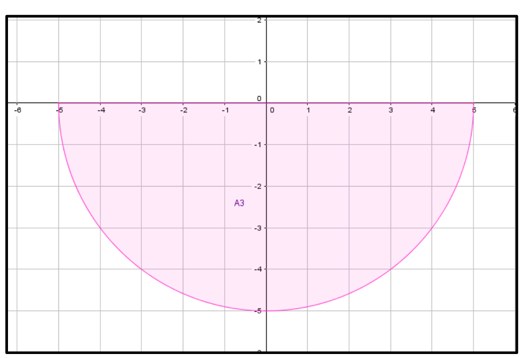
$$f(x) = (x - \sqrt{25 - x^2}) = g(x) + h(x)$$

con:

$$\boldsymbol{g(x) = x \,;\, h(x) = -\sqrt{25 - x^2}}$$



Grafica 4: Área bajo la curva de $g(x) = x$



Grafica 5: Área bajo la curva de $h(x) = -\sqrt{25 - x^2}$

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERIA

MATEMATICA BASICA 2 29 de abril de 2015

No	**Explicación**	**Operatoria**
1	Como se observa en las gráficas 4 y 5, la integral esa formada por 3 áreas formadas por las gráficas de las funciones g(x) y h(x), por lo cual el resultado está formado por la sumatoria de estas áreas.	$\int_{-5}^{5}(x-\sqrt{25-x^2}) = A_1 + A_2 + A_3$
2	De las gráficas 4 y 5 se observar que las áreas son dos triángulos idénticos y la mitad de una esfera. Tomando en cuenta que las regiones debajo del eje x son áreas negativas y sustituyendo valores.	$= -\frac{1}{2}(\cancel{5})(5)+\frac{1}{2}(\cancel{5})(5) - \frac{1}{2}\pi r^2$
3	Operando la expresión se tiene	$= -\frac{1}{2}\pi 5^2 = -\frac{25}{2}\pi\, u^2$

$\boxed{\textbf{R//} \int_{-5}^{5}\left(x-\sqrt{25-x^2}\right)dx = -\frac{25}{2}\pi\, u^2}$

c) Calcular $\int \frac{dx}{cos^2x\ \sqrt{1+tanx}}$

No.	Explicación	Operación
1	Para la resolución del problema se utilizara la regla de sustitución.	$u = 1+\tan x$
2	Se deriva la nueva variable u	$du = sec^2x\ dx$
3	Aplicando la identidad trigonométrica $\boldsymbol{\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}}$	$du = \frac{dx}{cos^2x}$

4	Sustituyendo en la integral original	$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int u^{-1/2} du$
5.	Operando la integral.	$\int u^{-1/2} du = 2u^{1/2} + C$
6.	Regresando a la variable original x.	$= 2(1 + \tan x)^{1/2} + C$

R// $\int \frac{dx}{\boldsymbol{cos^2x\ \sqrt{1+tanx}}} = 2(1 + \tan x)^{1/2} + C$

d) Si $\boldsymbol{y} = \int_{\sqrt{x}}^{2x} \boldsymbol{arctant\ dt}$ obtenga $\frac{dy}{dx}$

No.	Explicación	Operación
1	Derivando de ambos lados de la ecuación.	$\frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dx}} = \frac{d}{dx}\left(\int_{\sqrt{x}}^{2x} \boldsymbol{arctant\ dt}\right)$
2	Tomando como base la segunda parte del teorema fundamental del cálculo: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), donde\ F' = f$ Y generalizando para limites expresados como funciones respecto de x	$\frac{d}{dx}\left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt\right) = F\big(h(x)\big)h'(x) + F\big(g(x)\big)g'(x)$
3	Sustituyendo valores se tiene.	$\frac{dy}{dx} = \arctan(2x)(2) - \arctan(\sqrt{x})(\frac{1}{2\sqrt{x}})$

$$\frac{dy}{dx} = 2\arctan(2x) - \frac{1}{2\sqrt{x}}\arctan(\sqrt{x})$$

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERIA

MATEMATICA BASICA 2 29 de abril de 2015

TEMA No. 3: (20 pts.)

$$\mathbf{sen}\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^2 - 2$$

<table>
<tr><td>No.</td><td>Explicación</td><td>Operatoria</td></tr>
<tr><td>1.</td><td>Escribimos la ecuación en la forma estándar.</td><td>$\operatorname{sen} x - x^2 + 2 = 0$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Tomando $f(x) = sen\, x - x^2 + 2$ y derivando la función.</td><td>$f'(x) = \cos x - 2x$</td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="2">Aplicando la fórmula del método de newton :
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$
En cada iteración se calcula el error de método:
$$Error = |x_n - x_{n+1}|$$
El método se detiene cuando Error < tolerancia

Y tomando $x_0 = 1$ con una tolerancia de $1x10^{-5}$ se construye la siguiente tabla:
<table>
<tr><td>n</td><td>x_n</td><td>x_{n+1}</td><td>$Error$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>2.26153592</td><td>1.261535924</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2.26153592</td><td>1.80733144</td><td>0.454204486</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1.80733144</td><td>1.73087213</td><td>0.07645931</td></tr>
<tr><td>3</td><td>1.73087213</td><td>1.7284687</td><td>0.002403426</td></tr>
<tr><td>4</td><td>1.7284687</td><td>1.72846632</td><td>2.38319E-06</td></tr>
</table></td></tr>
</table>

Una raíz de la ecuación $\mathbf{sen}\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^2 - \mathbf{2}$ obtenida por el método de newton es **1.728466**

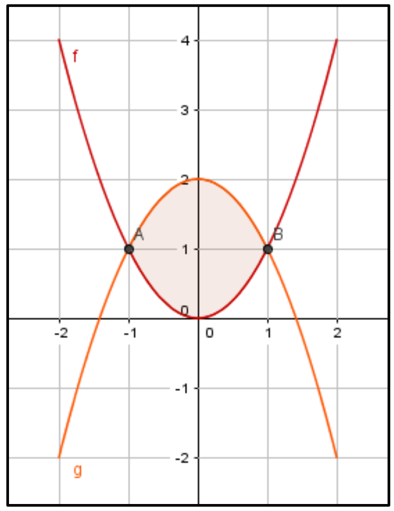
TEMA No. 4 (20 pts.)

a) La base de un sólido es la región limitada por las parábolas $\boldsymbol{y = x^2}$ y $\boldsymbol{y = 2 - x^2}$. Encuentre el volumen del sólido si las secciones transversales perpendiculares al eje *x* son cuadrados y uno de sus lados coincide con la base.
Paso 1: se grafican las ecuaciones para identificar la región limitada.

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERIA

MATEMATICA BASICA 2 29 de abril de 2015



Grafica 6: Base del sólido, formada por la región limitada por las parábolas dadas.

No	EXPLICACION	OPERATORIA
1.	Se igualan ambas funciones para encontrar los puntos de intersección de las gráficas.	$x^2 = 2 - x^2$
2.	Se despeja la variable x pasando a r sumar la x^2 del lado derecho al lazo izquierdo de la igualdad.	$2x^2 = 2$
3.	Se dividen ambos lados de la igualdad por 2 para seguir despejando la variable x.	$x^2 = 1$
4.	Se saca raíz cuadrada a ambos lados de la ecuación; y con esto se determinan los puntos de intersección sobre el eje x, los cuales se utilizaran para determinar los límites de la región limitada por la intersección de las dos curvas.	$x = \pm 1$
5	La base de una sección transversal del volumen, perpendicular al eje x se expresa como la resta de ambas funciones:	$\mathrm{b} = (2 - x^2) - (x^2) = 2 - 2x^2$
6	Se plantea la integral para obtener el volumen del sólido.	$\int_{-1}^{1} A(x)dx = \int_{-1}^{1} (2 - 2x^2)^2 dx$

7	Se desarrolla el exponente cuadrado y cambiando los límites para facilitar el cálculo de la integral.	$2\int_0^1 (4-8x^2+4x^4)dx$
8.	Se desarrolla la integral	$2\left(4x-\frac{8}{3}x^3+\frac{4}{5}x^5\right)\Big\vert_0^1$
9.	Se evalúan los limites	$2\left(4-\frac{8}{3}+\frac{4}{5}\right)=\frac{64}{15}\ u^3$

R// El volumen del solido es de $\frac{64}{15}\ u^3$