UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-103-3-M-2-00-2017

CURSO:	**Matemática Básica 2**
SEMESTRE:	**Segundo**
CÓDIGO DEL CURSO:	**103**
TIPO DE EXAMEN:	**Tercer Examen Parcial**
FECHA DE EXAMEN:	**24 de octubre de 2017**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Kevin Itzep**
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	**Kevin Itzep**
COORDINADOR:	**Ing. José Alfredo González Díaz**

Tercer examen parcial

Temario C

Tema 1: (14 puntos)

Suponga que $y = ax^2 + bx + c \geq 0$ sobre el intervalo $[0, d]$. Utilice límites y sumas de Riemann, para mostrar que el área bajo la curva, sobre el intervalo indicado está dada por $A = a\dfrac{d^3}{3} + b\dfrac{d^2}{2} + cd$

Tema 2: (20 puntos)

a. Trace la gráfica de la función $y = 1 - |x|$. Evalúe la integral $\int_{-1}^{2} (1 - |x|)dx$ interpretándola en términos de áreas de figuras geométricas.

b. Dada la función $g(x) = \int_{5x}^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt$. Utilice el teorema fundamental del cálculo obtener $g'(x)$.

Tema 3: (20 puntos)

a. Evalúe la integral

$$\int x\sqrt{2x-1}dx$$

b. Utilice el teorema fundamental del cálculo y una sustitución adecuada para obtener que

$$\int_a^b f(x)f'(x)dx = \frac{1}{2}\left[(f(b))^2 - (f(a))^2\right]$$

Tema 4: (20 puntos)

Calcular el área de la región limitada por las gráficas de

$$y = 2e^x - 1, \qquad y = e^x \qquad \& \qquad y = 2.$$

Tema 5: (26 puntos)

Calcular el volumen del sólido obtenido al girar la región limitada por las gráficas de la parábola $y = x^2$, la recta $2x - y = 0$.

a. Al rededor de la recta $x = 2$ utilizando el método de arandelas.

b. Al rededor de la recta $y = -2$ utilizando el método de cascarones cilíndricos.

Universidad de San Carlos de Guatemala
Facultad de Ingeniería

Departamento de Matemática
Matemática Básica 2
24 de octubre del 2017

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

Tema 1: 14 puntos

$$A = a\frac{d^3}{3} + b\frac{d^2}{2} + cd.$$

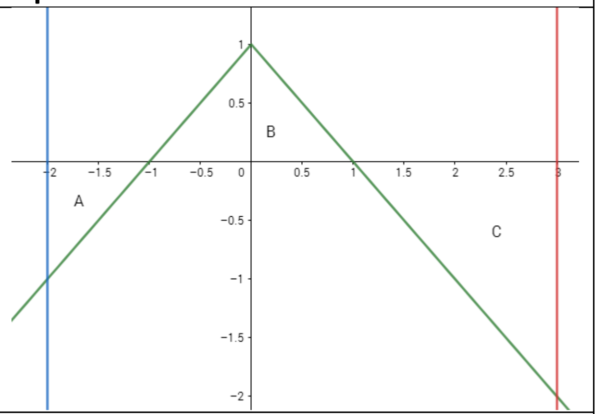
No.	Explicación	Operatoria
1.	Primero se determinan delta y coeficiente i.	$\Delta x = \frac{d-0}{n} = \frac{d}{n},$ $x_i = 0 + \frac{d}{n}i = \frac{d}{n}i$
2.	La sumatoria de Riemann está dada de la siguiente manera:	$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Delta x$
3.	Aplicando la suma de Riemann	$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \left[a\left(\frac{d}{n}i\right)^2 + \frac{bd}{n}i + c\right]\left[\frac{d}{n}\right]$
4.	Aplicando algebra En este caso solo se multiplica el factor de afuera por toda la expresión	$A = \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{i=0}^{n} \left[a\left(\frac{d}{n}i\right)^2\right]\left[\frac{d}{n}\right] + \sum_{i=0}^{n}\left[\frac{bd}{n}i\right]\left[\frac{d}{n}\right] + \sum_{i=0}^{n}\left[\frac{cd}{n}\right]\right]$
5.	Resolviendo la sumatoria para el primer termino, donde se valúa el limite cuando n tiende a infinito, donde se sabe que todo número al ser dividido por un numero mucho mayor tiende a cero.	$\sum_{i=0}^{n} \left[a\left(\frac{d}{n}i\right)^2\right]\left[\frac{d}{n}\right]$ $= \sum_{i=0}^{n}\left[a\frac{d^3}{n^3}i^2\right] = a\frac{d^3}{n^3}\sum_{i=0}^{n} i^2$ $= \lim_{n\to\infty}\left[a\frac{d^3}{n^3}\left[\frac{2n^3+3n^2+n}{6}\right]\right]$

		$= \lim_{n\to\infty}\left[a\frac{2d^3n^3}{6n^3} + a\frac{3n^2d^3}{6n^3} + a\frac{nd^3}{6n^3}\right]$ $\lim_{n\to\infty}\left[a\frac{2d^3}{6} + a\frac{3d^3}{6n} + a\frac{d^3}{6n^2}\right]$ $= a\frac{d^3}{3} + 0 + 0$ $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\left[a\left(\frac{d}{n}i\right)^2\right]\left[\frac{d}{n}\right] = a\frac{d^3}{3}$
6.	Resolviendo la sumatoria para el segundo término.	$\sum_{i=0}^{n}\left[\frac{bd}{n}i\right]\left[\frac{d}{n}\right] =$ $\sum_{i=0}^{n}\frac{bd^2}{n^2}i = \frac{bd^2}{n^2}\sum_{i=0}^{n}i = \left[\frac{bd^2}{n^2}\right]\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$ $\frac{bd^2(n^2+n)}{2n^2} =$ $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{bd^2}{2} + \frac{bd^2}{2n}\right] = \frac{bd^2}{2} + 0$ $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\left[\frac{bd}{n}i\right]\left[\frac{d}{n}\right] = b\frac{d^2}{2}$
7.	Resolviendo la sumatoria para el tercer termino	$\sum_{i=0}^{n}\left[\frac{cd}{n}\right] = \left[\frac{cd}{n}\right]\sum_{i=0}^{n}1 = \left[\frac{cd}{n}\right]n$ $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{cd}{n}\right]n = \lim_{n\to\infty} cd = cd$

R./ $A = a\frac{d^3}{3} + b\frac{d^2}{2} + cd$

Tema 2: 20 puntos

a) Trace la gráfica de la función $y = 1 - |x|$. Evalué la integral $\int_{-2}^{3}(1 - |x|)dx$ interpretandola en términos de áreas de figuras geométricas.

No.	Explicación	Operatoria
1.	Primeramente, graficamos la función	
2.	La integral se calcula mediante área bajo la curva de los triángulos. A, B, C.	$$\int_{-2}^{3}(1 - \lvert x\rvert)dx = A_b - A_a - A_c$$
3.	Se procede a encontrar el valor del área para cada triangulo.	$A_a = \frac{base_a * altura_a}{2}$, $base_a = \lvert 1 - \lvert 2\rvert\rvert = 1$, $altura_a = 1, A_a = \frac{1 * 1}{2} = \frac{1}{2}$ $A_b = \frac{base_b * altura_b}{2}$, $base_b = 2$, $altura_b = \lvert 1 - \lvert 0\rvert\rvert = 1$, $A_b = \frac{2}{2} = 1$ $A_c = \frac{base_c * altura_c}{2}$, $base_c = 2, altura_c = \lvert 1 - \lvert 3\rvert\rvert = 2$, $A_c = \frac{2 * 2}{2} = 2$
4.	Se procede a sumar las áreas de cada triangulo, asumiendo que arriba de la recta horizontal es positivo y debajo de ella es negativo	$$A = A_b - A_a - A_c = 1 - 2 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

R./

$$A = -\frac{3}{2}$$

b.) Dada la función $g(x) = \int_{\sqrt{x}}^{5x} e^{-t^2}\,dt$, utilize el teorema fundamental del calculo para obtener $g'(x)$.

No.	Explicación	Operatoria
1.	Definimos $G(x)$ como la antiderivada de e^{-t^2}	$G'(x) = e^{-t^2}$
2.	Aplicando el teorema fundamental del calculo	$\int_{5x}^{\sqrt{x}} e^{-t^2} = G(\sqrt{x}) - G(5x)$
3.	Se deriva	$g'(x) = \frac{d}{dx}\left[G(\sqrt{x}) - G(5x)\right]$ $= 5e^{-(5x)^2} - \left(-\frac{e^{-\sqrt{x}^2}}{2\sqrt{x}}\right)$

R./

$$g'(x) = \frac{e^{-x}}{2\sqrt{x}} - 5e^{-(5x)^2}$$

Tema 3: 20 puntos

a) Evalué la integral $\int x\sqrt{2x-1}dx$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se determina que parámetro de la integral será u.	$u = 2x - 1\, , du = 2dx - 0, x = \dfrac{u+1}{2}$
2.	Se hace un cambio de variables de “x” a “u”	$\dfrac{1}{2}\int \left[\dfrac{u+1}{2}\right]\sqrt{u}\, du = \dfrac{1}{4}\int \left(u^{\frac{3}{2}} + \sqrt{u}\right) du$
3.	Resolviendo la integral.	$\dfrac{1}{4}\left[\dfrac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} + \dfrac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + c\right] = \dfrac{2}{20}u^{\frac{5}{2}} - \dfrac{2}{12}u^{\frac{3}{2}} + c$ $= u^{\frac{3}{2}}\left(\dfrac{1}{10}u - \dfrac{1}{6}\right) + c$
4.	Aplicando algebra y cambio de variables de “u” a “x”	$u^{\frac{3}{2}}\left(\dfrac{6u-10}{60}\right) + c$ $= (2x-1)^{\frac{3}{2}}\left(\dfrac{6(2x-1)+1}{60}\right) + c$ $(2x-1)^{\frac{3}{2}}\left(\dfrac{12x-5}{60}\right) + c$ $= \dfrac{(2x-1)^{\frac{3}{2}}(12x-5)}{60} + c$

R./

$$\int x\sqrt{2x-1}dx = \frac{(2x-1)^{\frac{3}{2}}(12x-5)}{60} + c$$

b) Utilice el teorema fundamental del cálculo y una sustitución adecuada para obtener que $\int_a^b f(x)f'(x)dx = \frac{1}{2}\left[(f(b))^2 + (f(a))^2\right]$

No	EXPLICACION	OPERATORIA
1	Se determina que parámetro de la integral será u.	$u = f(x), du = f'(x)dx, \int_a^b udu = \left[\frac{1}{2}u^2\right]_a^b$
2	Se sustituye en la ecuación original	$\left[\frac{1}{2}f(x)^2\right]_a^b = \frac{1}{2}\left[(f(b))^2 - (f(a))^2\right]$

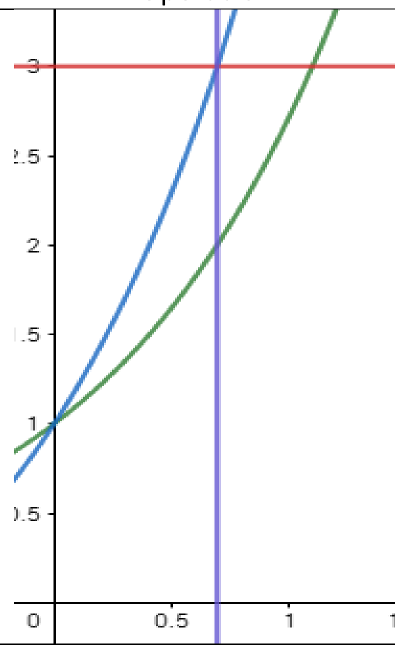
R./

$$\int_c^d f(x)f'(x)dx = \frac{1}{2}\left[(f(b))^2 + (f(a))^2\right]$$

Tema 4: 20 puntos

Calcular el área de la región limitada por las graficas

$$y = 2e^x - 1; y = e^x; y = 2$$

No.	Explicación	Operación
1	Se grafica	
2	Se debe de calcular dos integrales. Ya que se puede observar que hay más de un área que interviene dos tipos de graficas	$A = \int_0^a (2e^x - 1 - e^x)dx + \int_a^b (2 - e^x)dx$
3	Determinan las intersecciones de la graficas.	Donde a es la interseccion entre $y = 2e^x - 1$ & $y = 2$ Donde b es la interseccion entre $y = e^x$ & $y = 2$ $3 = 2e^x - 1 => x = \ln(2)$ $3 = e^x => x = \ln(3)$
4	Sustituyendo datos y resolviendo la integral.	$= \int_0^{\ln(2)} (e^x - 1)dx + \int_{\ln(2)}^{\ln(3)} (3 - e^x)dx$ $A = (e^x - x)\Big\|_0^{\ln(2)} + (3x - e^x)\Big\|_{\ln(2)}^{\ln(3)}$ $A = (2 - \ln(2)) - (1 - 0) + (3\ln(3) - 3) - (3\ln(2) - 2)$ $= 0.52325u^2$

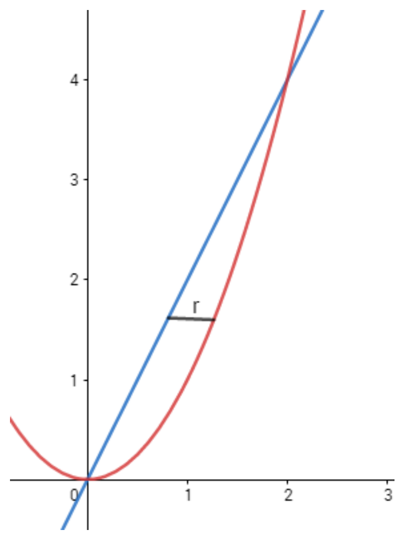
R./

$$A = 0.52325u^2$$

Tema 5: 26 puntos.

Calcular el volumen del solido obtenido al girar la región limitada por las gráficas de la parábola $y = x^2$, y la recta $2x - y = 0$

a.) Alrededor de la recta $x = 2$ utilizando el método de arandelas.



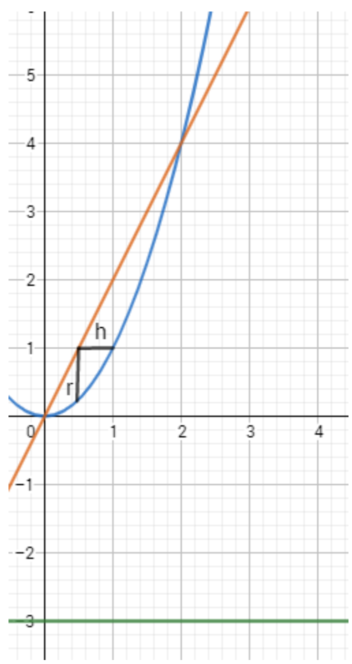
No.	Explicación	Operación
1	Se encuentran las intersecciones	$x^2 = 2x \Rightarrow x_1 = 0, y_1 = 0 \;\&\; x_2 = 2, y_2 = 4$
2	Se plantea el volumen	$V = \pi \int_0^4 \left[\left(2 - \frac{y}{2}\right)^2 - \left(2 - \sqrt{y}\right)^2\right] dy$
3	Resolviendo la integral	$\pi \int_0^4 \left[\frac{y^2}{4} - 2y + 4 - y + 4\sqrt{y} - 4\right] dy$ $= \pi \int_0^4 \left[\frac{y^2}{4} - 3y + 4\sqrt{y}\right] dy$ $\pi \left[\frac{y^3}{12} - \frac{3}{2}y^2 + \frac{8}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 =$

		$\pi\left[\frac{4^3}{12}-\frac{3}{2}*4^2+\frac{8}{3}*4^{\frac{3}{2}}-0\right]$

R./

$$A=\frac{8\pi}{3}u^3$$

b.) Al rededor de la recta $y=-2$ utilizando el metodo de cascarones cilindricos.



No.	Explicación	Operatoria
1	Determinando el radio "r" y la altura "h"	$r=y+2\,;h=\sqrt{y}-\frac{y}{2}$

2	Aplicando la integral	$A = 2\pi \int_0^4 (y+2)\left(\sqrt{y} - \frac{y}{2}\right) dy =$ $2\pi \int_0^4 \left[y^{\frac{3}{2}} - \frac{y^2}{2} - y + 2\sqrt{y} \right] dy$
3	Resolviendo la integral	$A = 2\pi \left[\frac{2y^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{y^3}{6} - \frac{y^2}{2} + \frac{4}{3} y^{\frac{3}{2}} \right]_0^4$ $= 2\pi \left[\frac{2 * 4^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{4^3}{6} - \frac{4^2}{2} + \frac{4}{3} * 4^{\frac{3}{2}} + 0 \right]$

R./

$$A = \frac{48}{5} \pi\, u^3$$