Ejercicios sobre teorema fundamental

En los ejercicios 1 a 20 evalúe la integral definida

1. $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-2x^2}}$

2. $\displaystyle\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{1+2x}}\,dx$

3. $\displaystyle\int_2^4 x^2\sqrt{x^3-4}\;dx$

4. $\displaystyle\int_0^2 \left|x^2-1\right|dx$

5. $\displaystyle\int_{-1}^2 x|x|\,dx$

6. $\displaystyle\int_{-5}^1 \left(3+|x+4|\right)dx$

7. $\displaystyle\int_{-1}^3 \left(|x|-1\right)dx$

8. $\displaystyle\int_0^3 \frac{x^3}{\left(x^2+4\right)^{3/2}}\,dx$

9. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos x\cdot \operatorname{sen}(\operatorname{sen}x)\,dx$

10. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$

11. $\displaystyle\int_{e^2}^{e^4} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

12. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cot x}{(\operatorname{sen}x)^{-1}+\operatorname{sen}x}\,dx$

13. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{5}} t\sqrt{t^2+1}\;dt$

14. $\displaystyle\int_1^2 \frac{y+5y^2}{y^3}\,dy$

15. $\displaystyle\int_0^{3\pi/2} |\operatorname{sen}x|\,dx$

16. $\displaystyle\int_2^3 \frac{3x-2}{\sqrt{4x-x^2}}\,dx$

17. $\displaystyle\int_0^3 \left|x^2-4\right|dx$

18. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^3\theta\operatorname{sen}\theta\;d\theta$

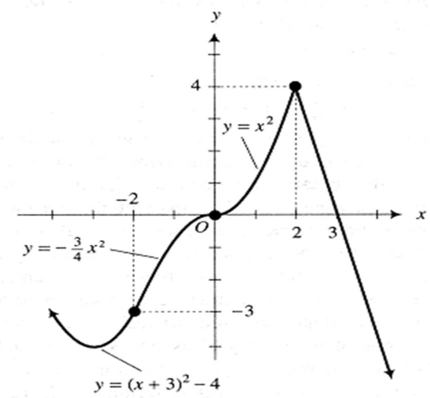
19. $\displaystyle\int_1^4 \frac{x}{x^2-x+1}\,dx$

20. $\displaystyle\int_0^1 2\pi(y+1)\sqrt{1-y}\;dy$

21. La figura dada muestra la representación gráfica de una función definida por partes, suponga que el tramo cuya fórmula no se muestra es una línea recta.

a. Construir la fórmula de la función

b. Calcule $\displaystyle\int_{-2}^{3} f(x)\,dx$



22. Utilice el teorema fundamental del cálculo y una sustitución adecuada para obtener que

$$\int_a^b f(x)f'(x)\,dx = \frac{1}{2}\left[(f(b))^2 - (f(a))^2\right]$$

23. Calcule $f'(x)$ si:

$$f(x) = \int_0^{x^3} t^2 \cos(t^2)\, dt$$

24. Calcule:

$$\frac{d}{dx}\left[\int_{\cos x}^{1} \sqrt{t^3 + 5t}\, dt\right]$$

25. Dada la función

$$g(x) = \int_{5x}^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\, dt\,.$$

Utilice el teorema fundamental del cálculo obtener $g'(x)$.

26. Calcule:

$$\frac{d}{dx}\left[\int_{x^2}^{\tan x} \frac{1}{1+t^2}\, dt\right]$$

27. Si $g(x) = \int_0^x t^2 \operatorname{sen}(t^3 + 4)\,dt$, calcule $g'(x)$

28. Evalúe el límite: $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\int_0^{-x} \operatorname{sen}^2 t\, dt\right]$

29. Use la parte 2 del teorema fundamental del cálculo para encontrar la derivada de

$$h(x) = \int_{x^2}^{0} \sqrt{1+t^3}\, dt$$

30. Determine la derivada de la función

$$\int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{e^{-t}}{t}\, dt$$

31. Derive la función $g(x)$ usando el teorema fundamental del cálculo

$$g(x) = \int_{x}^{\cos x} t^2\sqrt{1+t^2}\; dt$$

32. Utilice el teorema fundamental del cálculo para calcular

$$\frac{d}{dx}\left[\int_0^{1/x} \frac{1}{t^2+1}dt + \int_0^{x} \frac{1}{t^2+1}dt\right], \qquad x > 0$$

33. Utilice el teorema fundamental del cálculo para calcular

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\int_0^{x^2} \operatorname{sen} t\; dt}{x-1}\right]$$

34. Dada la función $I(x) = \int_0^{x^2} (t-1)dt$

a. Calcule $I(2)$

b. Determine $I'(x)$ y calcule $I'(2)$

35. Dadas $f(x) = x^2$ y $g(x) = \int\limits_0^x (\mathrm{t}-1)dt$. Se define $I(x) = g(f(x))$.

a. Construya $I(x)$ y calcule $I(2)$

b. Determine $I'(x)$ y calcule $I'(2)$

36. Si f es una función continua tal que $\int_0^x f(t)\,dt = xe^{2x} + \int_0^x e^{-t}f(t)\,dt$, para toda x. Utilice el teorema fundamental del cálculo para hallar una fórmula explícita para $f(x)$.

37. Calcule

$$\frac{d^2}{dx^2}\int_0^x \left(\int_1^{\cos t} \sqrt{1+u^4}\,du\right)dt\,.$$