UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-103-1-M-2-00-2017

CURSO:	**Matemática Básica 2**
SEMESTRE:	**Segundo**
CÓDIGO DEL CURSO:	**103**
TIPO DE EXAMEN:	**Primer examen parcial**
FECHA DE EXAMEN:	**16 de agosto del 2017**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Kevin Pinto**
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	**Kevin Pinto**
REVISÓ EL EXAMEN:	**Dra. Mayra Castillo**
COORDINADOR:	**Ing. José Alfredo González Díaz**

Primer examen parcial

Temario A

Tema 1: (20 puntos)

Utilizando operaciones algebraicas y las leyes de los límites calcule

a. $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^2-5x-6}{x^2+4x+|x-2|}$ **b.** $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{9x^2+2x}-3x\right)$

Tema 2: (15 puntos)

Si $f(x)=\operatorname{sen} x$, calcule $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ utilizando la definición de derivada como un límite.

Tema 3: (15 puntos)

Determine todos los valores de la constante a, tales que la función sea continua en todos los reales.

$$f(x)=\begin{cases} ax^2-2 & \text{si} \quad x\le 0 \\ \dfrac{ax}{\tan x} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

Tema 4: (30 puntos)

a. Usando las reglas de derivación encuentre la primera derivada

$$f(t)=\left(2\operatorname{sen}^3 t\right)(3t-1)^2$$

b. Utilizando reglas de derivación calcule la segunda derivada

$$f(x)=\tan(x^2)$$

c. Calcule $f'(13)$ si $h(x)=f\left(g(x)+x^2\right)$ y $g'(3)=4$, $h'(3)=2$, $g(3)=4$

Tema 5: (20 puntos)

a. La curva $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ se llama curva de María Agnesi. Encuentre la ecuación de la recta tangente en el punto donde $x=-1$.

b. Trace una gráfica de la función *f* que cumpla con las condiciones siguientes

$f(0)=1$, $f(4)=0$, $f(6)=0$, $\displaystyle\lim_{x\to 3^-} f(x)=2$, $\displaystyle\lim_{x\to 3^+} f(x)=+\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} f(x)=0$

$\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x)=2$

TEMA 1 (20 Pts)

a. Calcule la integral indefinida:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 5x - 6}{x^2 + 4x + |x - 2|}$$

SOLUCIÓN:

Explicación	**Operatoria**
Evaluamos la función y verificamos que la forma sea indeterminada.	$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 5x - 6}{x^2 + 4x + \lvert x - 2\rvert}$ $\frac{(-1)^2 - 5(-1) - 6}{(-1)^2 + 4(-1) + \lvert(-1) - 2\rvert} = \frac{0}{0}$
Primero procederemos a eliminar el valor absoluto de la fracción, para ello necesitamos aplicar su concepto y separarlo en dos funciones.	$\lvert x - 2\rvert = \begin{cases} -(x-2) & sí \quad x \leq 2 \\ x - 2 & sí \quad x \geq 2 \end{cases}$
En nuestro caso el límite de x tiende al valor de -1. En razón de ello, trabajamos el valor absoluto como la parte de la función que incluye dicho dominio.	$\lvert x - 2\rvert = -(x - 2) \quad sí \quad x \leq 2$ $\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 5x - 6}{x^2 + 4x + \lvert x - 2\rvert}$ $\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 5x - 6}{x^2 + 4x - (x - 2)}$
A continuación, realizaremos la manipulación algebraica para resolver el límite.	$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 5x - 6}{x^2 + 4x - (x - 2)}$ $\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 5x - 6}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \to -1} \frac{(x + 1)(x - 6)}{(x + 2)(x + 1)}$

Una vez realizada la operatoria algebraica, eliminaremos los términos semejantes y procederemos a evaluar el límite.	$\int \frac{du}{u^2+1} = \tan^{-1}(u) + c$
Finalmente regresamos a la variable original.	$\tan^{-1}(u) + c = \tan^{-1}(x-2) + c$

R// $\tan^{-1}(x-2) + c$

b. Calcule el límite

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{9x^2 + 2x} - 3x \right)$$

SOLUCIÓN:

Explicación	**Operatoria**
Evaluamos el límite y verificamos que la forma sea indeterminada.	$\lim_{x\to\infty} \sqrt{9x^2+2x} - 3x$ $\sqrt{9(\infty)^2 + 2(\infty)} - 3(\infty) = \infty - \infty$ *Indeterminado*
Una vez verificada la indeterminación, procedemos a manipular de manera algebraica el límite. Por lo tanto, primero multiplicaremos por el conjugado para eliminar la raíz.	$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{9x^2+2x} - 3x\right) * \frac{\sqrt{9x^2+2x}+3x}{\sqrt{9x^2+2x}+3x}$ $\lim_{x\to\infty} \frac{9x^2+2x-9x^2}{\sqrt{9x^2+2x}+3x}$
Ahora procedemos a simplificar el límite.	$\lim_{x\to\infty} \frac{9x^2+2x-9x^2}{\sqrt{9x^2+2x}+3x}$ $\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{\sqrt{9x^2+2x}+3x}$

Seguidamente dividiremos entre x toda la expresión para poder evaluar el límite. Nota: *Dividimos solo dentro de x porque el límite tiende a infinito positivo, si este tendiese a infinito negativo deberemos dividir dentro de -x*	$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{\sqrt{9x^2+2x}+3x} * \frac{1/x}{1/x}$ $\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{x}}{\frac{\sqrt{9x^2+2x}}{x}+\frac{3x}{x}}$
Para operar las equis del radical debemos ingresa la "x" como su función equivalente es decir "x^2". Por ejemplo: $5 = \sqrt{5^2} = \sqrt{25}$	$\lim_{x\to\propto} \frac{\frac{2x}{x}}{\sqrt{\frac{9x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}}+\frac{3x}{x}}$
A continuación, se simplificará la expresión y luego se evaluará el limite al infinito. Recordando que: Un número divido infinito es equivalente a cero.	$\lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{9+\frac{2}{x}}+3}$ $\frac{2}{\sqrt{9+\frac{2}{\infty}}+3} = \frac{2}{\sqrt{9}+3} = \frac{2}{3+3} = \frac{1}{3}$

R// El límite tiende a 1/3

TEMA 2 (15 Pts)

Si $f(x) = \operatorname{sen} x$, calcule $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ utilizando la definición de derivada como un límite.

SOLUCIÓN:

Explicación	**Operatoria**
Recordamos la derivada por definición:	$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$
Con el fin de simplificar la operatoria, primero calcularemos la derivada y luego procederemos a evaluarla en pi medios.	$\lim_{h\to 0} \frac{sen(x+h) - sen(x)}{h}$ $\lim_{h\to 0} \frac{sen(x)\cos(h) + sen(h)\cos(x) - sen(x)}{h}$ $\lim_{h\to 0} \frac{sen(x)(\cos(h) - 1) + sen(h)\cos(x)}{h}$ $\lim_{h\to 0} \frac{sen(x)(\cos(h) - 1)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{sen(h)\cos(x)}{h}$
Por definición tenemos que: $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0$ $\lim_{x\to 0} \frac{senx}{x} = 1$	$sen(x) * \lim_{h\to 0} \frac{(\cos(h) - 1)}{h} + \cos(x) * \lim_{h\to 0} \frac{sen(h)}{h}$ $sen(x) * 0 + \cos(x) * 1$ $\cos(x)$
Finalmente evaluamos la derivada en pi medios	$\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = \cos(x)$ $\mathrm{f}'(\pi/2) = \cos(\pi/2)$ $\mathrm{f}'(\pi/2) = 0$

R// $\mathrm{f}'(\pi/2) = 0$

TEMA 3 (15 Pts)

Determine todos los valores de la constante a , tales que la función sea continua en todos los reales.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2 & \text{si} \quad x \le 0 \\ \dfrac{ax}{\tan x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

Explicación	**Operatoria**
Para que una función sea continua en todos los reales, el límite por la derecha debe ser igual a limite por la izquierda.	$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$
Teniendo presente la definición de límite, procedemos a plantear los limites para que exista continuidad	$\lim\limits_{x \to 0^-} ax^2 - 2 = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{ax}{tanx}$
A continuación, resolveremos el izquierdo límite.	$\lim\limits_{x \to 0^-} ax^2 - 2 = a(0) - 2 = -2$
Y ahora resolveremos el limite derecho, para el cual recordaremos la identidad. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{senx}{x} = 1$	$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{ax}{tanx}$ $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\frac{ax}{1}}{\frac{senx}{cosx}}$ $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{ax * cosx}{senx}$ $\lim\limits_{x \to 0^+} acosx * \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{senx}$ $\text{acos}(0) * \lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{senx}{x}\right)^{-1}$

	$$a * \left(\lim_{x\to 0^+} \frac{senx}{x}\right)^{-1}$$ $$a * (1)$$
Una vez resueltos los límites, es necesario igualarlos para determinar el valor de "a" que permita que la función sea continua.	$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$$ $$\lim_{x\to 0^-} ax^2 - 2 = \lim_{x\to 0^+} \frac{ax}{tanx}$$ $$-2 = a$$

R// El valor de a debe ser igual a -2 para que la función sea continua en todos los reales.

TEMA 4 (30 Pts)

a. Usando las reglas de derivación encuentre la primera derivada

$$f(t) = \left(2\operatorname{sen}^3 t\right)(3t-1)^2$$

SOLUCIÓN:

Explicación	Operatoria
Empezaremos indicando las derivadas que debemos calcular de manera individual, con el fin de clarificar el procedimiento.	$$\frac{d}{dt}((2sen^3t)(3t-1)^2)$$
Primero plantearemos la derivada del producto.	$$\frac{d}{dx}((2sen^3t)(3t-1)^2)$$ $$(3t-1)^2 * \frac{d}{dx}(2sen^3t) + (2sen^3t) * \frac{d}{dx}(3t-1)^2$$

Calcularemos la derivada de la primera función aplicando las siguientes reglas: • Extraemos la constante de la derivada • Derivamos por regla de la cadena • Derivamos el argumento	$2\frac{d}{dt}(sen^3t)$ $2(3*(sent)^{3-1})\frac{d}{dt}(sent)$ $6*(sent)^2*cost$
Calcularemos la derivada de la segunda función aplicando las siguientes reglas: • Derivamos por regla de la cadena • Derivamos el argumento	$\frac{d}{dt}(3t-1)^2$ $(2*(3t-1)^{2-1})\frac{d}{dt}(3t-1)$ $2*(3t-1)*3$
Ahora se sustituyeron las derivadas antes calculadas.	$(3t-1)^2*\frac{d}{dx}(2sen^3t)+(2sen^3t)*\frac{d}{dx}(3t-1)^2$ $(3t-1)^2*6*(sent)^2*cost$ $+(2sen^3t)*6*(3t-1)$

$$\frac{d}{dt}\left((2sen^3t)(3t-1)^2\right)=(3t-1)^2*6*(sent)^2*cost+(2sen^3t)*6*(3t-1)$$

b. Utilizando reglas de derivación calcule la segunda derivada

$$f(x)=\tan(x^2)$$

SOLUCIÓN:

Explicación	**Operatoria**
Calcularemos la primera derivada de la función aplicando las siguientes reglas: • Derivamos por regla de la cadena • Derivamos el argumento	$\frac{d}{dx}\tan(x^2)$ $\sec^2(x^2)\frac{d}{dx}(x^2)$ $\sec^2(x^2)*2x$

$$\frac{d}{dx}\tan(x^2) = 2x * \sec^2(x^2)$$

c. Calcule $f'(13)$ si $h(x) = f\left(g(x) + x^2\right)$ y $g'(3) = 4$, $h'(3) = 2$, $g(3) = 4$

Calcularemos la primera derivada de la función aplicando las siguientes reglas: • La parte de la izquierda, se indicará que la función fue derivada • La parte de la derecha primero se derivó por regla de la cadena • Derivamos el argumento de la función "f".	$\frac{d}{dx}[h(x) = f(g(x) + x^2)]$ $\frac{d}{dx}[h(x)] = h'(x)$ $\frac{d}{dx}[f(g(x) + x^2)]$ $= f'(g(x) + x^2) * \frac{d}{dx}[g(x) + x^2]$ $f'(g(x) + x^2) * (g'(x) + 2x)$
Una vez derivadas ambas partes procedemos a igualarlas.	$h'(x) = f'(g(x) + x^2) * (g'(x) + 2x)$
El problema nos solicita calcular f'(13), sin embargo, los datos que nos proporciona son evaluados en x=3: • g'(3) = 4 • h'(3) = 2 • g(3) = 4 A razón de ello, evaluaremos la función y las derivadas en x=3.	$h'(x) = f'(g(x) + x^2) * (g'(x) + 2x)$ **sí x=3** $h'(3) = f'(g(3) + 3^2) * (g'(3) + 2(3))$ $2 = f'(4 + 3^2) * (4 + 2(3))$ $2 = f'(13) * (10)$ $f'(13) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

$$R// \quad f'(13) = \frac{1}{5}$$

TEMA 5 (20 Pts)

a. La curva $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ se llama curva de María Agnesi. Encuentre la ecuación de la recta tangente en el punto donde $x = -1$.

SOLUCIÓN:

Explicación	**Operatoria**
Primero evaluaremos la función en el valor de x=-1, con el fin de determinar el punto de tangencia.	$x = -1$ $y(-1) = \dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{1}{1+(-1)^2} = \dfrac{1}{2}$ $(-1, \frac{1}{2})$
Determinamos la pendiente, derivando la función y evaluándola en el punto de tangencia, x=-1.	$y(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ $y'(x) = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$ $y'(-1) = \dfrac{-2(-1)}{(1+(-1)^2)^2} = \dfrac{1}{2}$
Finalmente calculamos la ecuación de la recta tangente, utilizando la función de punto pendiente; con los datos antes calculados P (-1,1/2) m = 1/2	$(y - y_0) = m(x - x_0)$ $(y - 1/2) = 1/2(x - (-1))$ $y = \dfrac{x}{2} + 1$

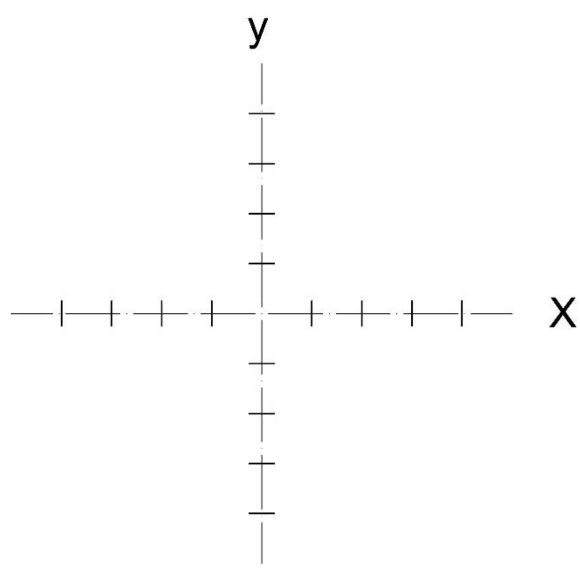
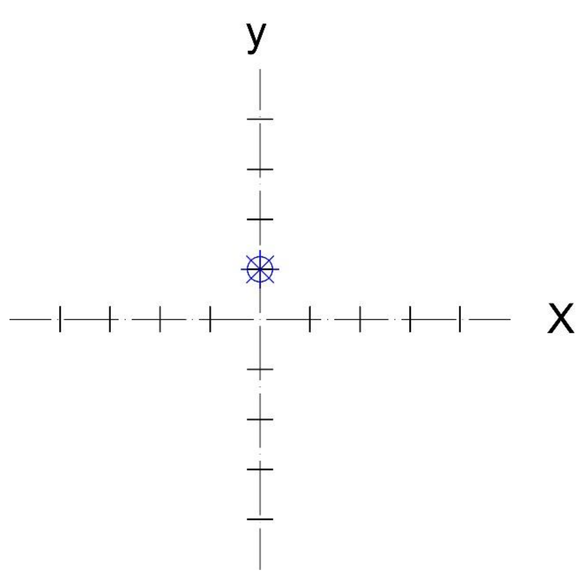
$R//$ La recta tangente en el punto x=-1 es $\frac{x}{2} + 1$

b. Trace una gráfica de la función *f* que cumpla con las condiciones siguientes

$f(0)=1,\ \ f(4)=0,\ \ f(6)=0,\ \ \lim_{x\to 3^-} f(x)=2\ ,\ \ \lim_{x\to 3^+} f(x)=+\infty\ ,\ \ \lim_{x\to -\infty} f(x)=0$

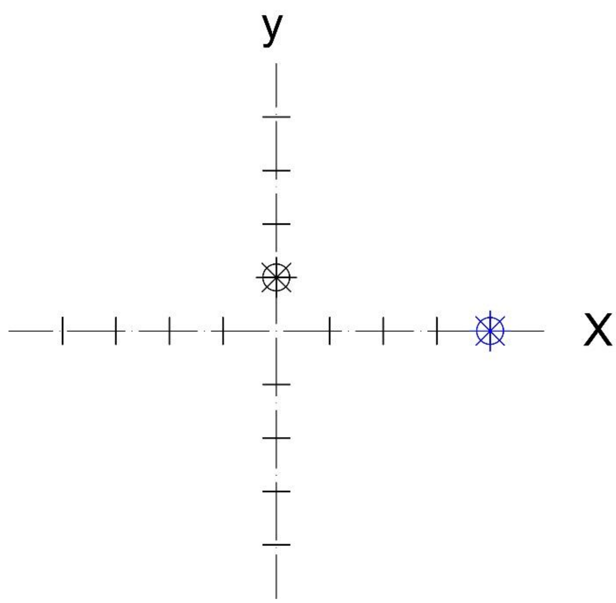
$\lim_{x\to +\infty} f(x)=2$

SOLUCIÓN:

Explicación	**Operatoria**
Realizamos la gráfica paso a paso de acuerdo a las indicaciones solicitadas, empezando con un plano en blanco:  	
Punto sobre el eje y. $f(0)=1$  	

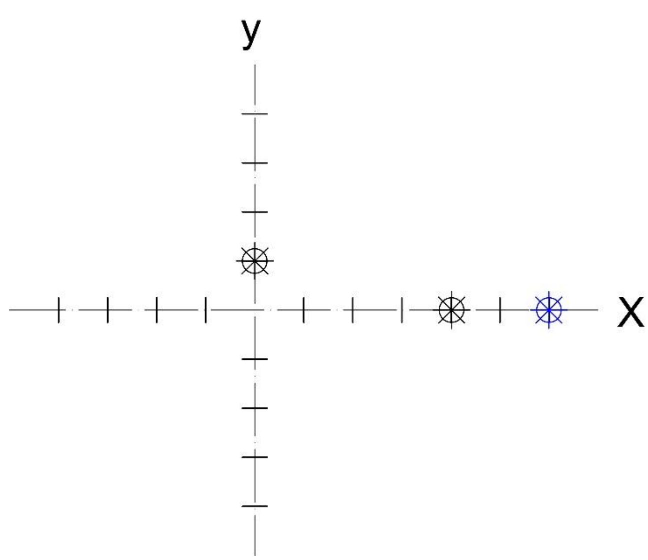
Punto sobre el eje (4,0).

$$f(4) = 0$$



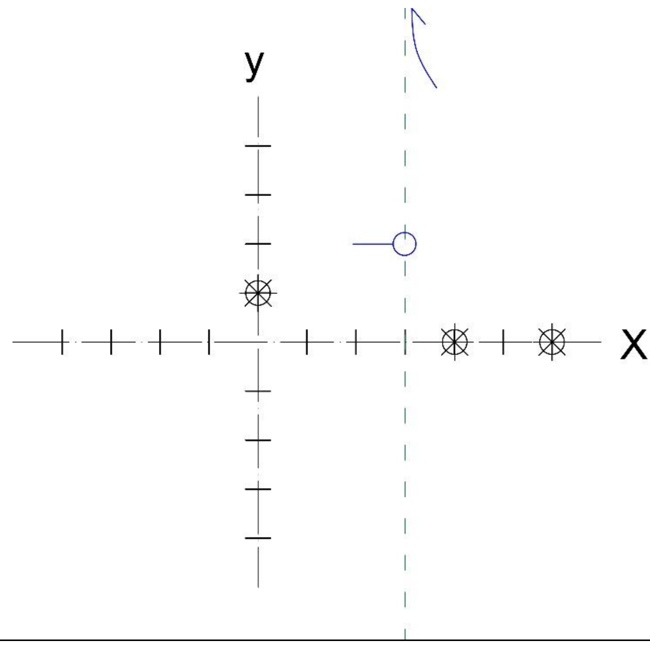
Punto sobre el eje (6,0).

$$f(6) = 0$$



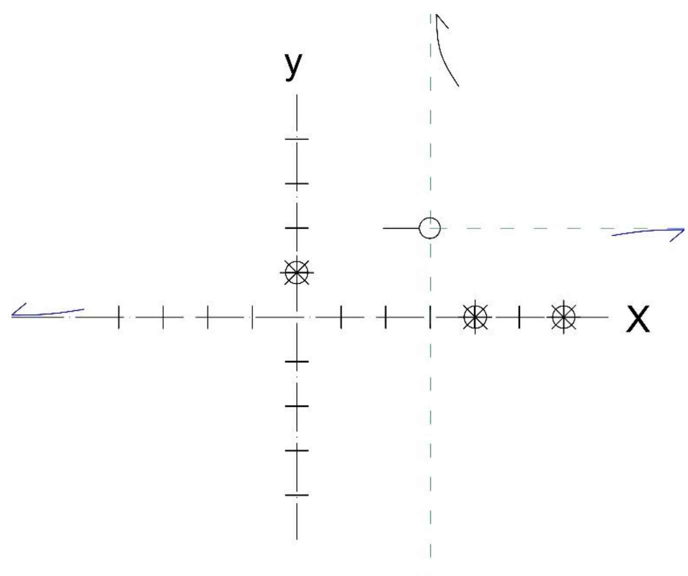
Límites para 3.

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = 2 \quad , \lim_{x\to 3^+} f(x) = +\infty$$



Límites al infinito.

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0 \quad , \lim_{x\to +\infty} f(x) = 2$$



Finalmente unimos todos los valores, identificados anteriormente.