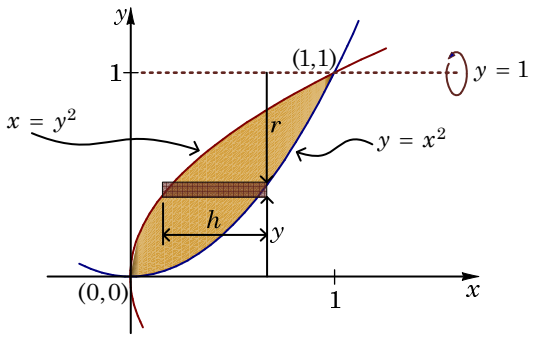
PROBLEMA RESUELTO 4

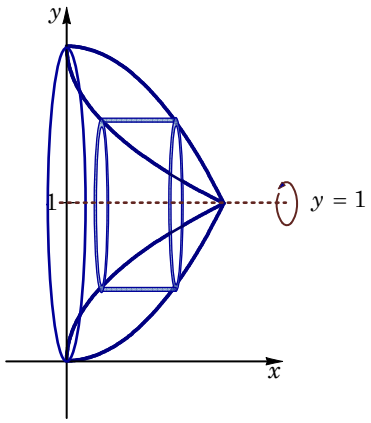
La región en el primer cuadrante, limitada por las curvas $y = x^2$ y $x = y^2$ se gira alrededor de la recta $y = 1$. Calcule el volumen del sólido generado utilizando el método de capas cilíndricas.

Solución

Se dibuja la región del plano que se va a girar, el eje de rotación y un elemento diferencial de área paralelo al eje de rotación. En la misma figura se indica el radio de la capa cilíndrica y su altura.



En la siguiente figura se muestra un dibujo aproximado del sólido de revolución, se dibuja también un elemento diferencial que tiene la forma de una capa cilíndrica con su eje en el eje de revolución.



El volumen del sólido está dado por

$$V = \int_a^b 2\pi r h dy$$

Como se observa en la primera figura, el radio r es la diferencia entre el valor de y correspondiente al eje de rotación y la variable independiente

$$r = 1 - y$$

La altura h de la capa cilíndrica es igual a la diferencia entre dos funciones cuya variable independiente es y. La función mayor es la que está mas a la derecha y es

$$x_2 = \sqrt{y}$$

La función menor es la que esta hacia la izquierda $x_1 = y^2$

$$h = x_2 - x_1$$

$$h = \sqrt{y} - y^2$$

Los límites te integración se obtienen de la región que está rotando. Como la variable de integración es y los limites van de 0 a 1

Entonces, la integral para calcular el volumen del sólido es

$$V = \int_0^1 2\pi(1-y)\left(\sqrt{y} - y^2\right)dy =$$

$$= 2\pi\int_0^1 \left(y^{1/2} - y^2 - y^{3/2} + y^3\right)dy$$

$$= 2\pi\left(\frac{2y^{3/2}}{3} - \frac{y^3}{3} - \frac{2y^{5/2}}{5} + \frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^1$$

$$= 2\pi\left(\frac{2(1)^{3/2}}{3} - \frac{(1)^3}{3} - \frac{2(1)^{5/2}}{5} + \frac{(1)^4}{4}\right) - 0$$

$$= 2\pi\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{4}\right)$$

$$= 2\pi\left(\frac{11}{60}\right)$$

$$V = \frac{11\pi}{30}$$