PROBLEMA RESUELTO 4

Encuentre una función f y un número a tales que

$$12 + \int_a^x \frac{f(t)}{t^2}\,dt = 4\sqrt{x}$$

Solución

Al derivar ambos lados de la ecuación con respecto a x

$$\frac{d}{dx}\left(12 + \int_a^x \frac{f(t)}{t^2}\,dt\right) = \frac{d}{dx}\left(4\sqrt{x}\right)$$

$$\frac{d}{dx}(12) + \frac{d}{dx}\left[\int_a^x \frac{f(t)}{t^2}\,dt\right] = 4\cdot\frac{1}{2}x^{-1/2}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x \frac{f(t)}{t^2}\,dt\right] = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

Al aplicar la parte 2 del teorema fundamental del cálculo, la derivada y la integral se cancelan, obteniéndose

$$\frac{f(x)}{x^2} = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$f(x) = \frac{2x^2}{\sqrt{x}} = 2x^{3/2}$$

Ahora se puede sustituir la función y calcular la integral utilizando la parte 1 del teorema fundamental

$$12 + \int_a^x \frac{f(t)}{t^2}\,dt = 4\sqrt{x}$$

$$12 + \int_a^x \frac{2t^{3/2}}{t^2}\,dt = 4\sqrt{x}$$

$$12 + 2\int_a^x t^{-1/2}\,dt = 4\sqrt{x}$$

$$12 + 2\left(\frac{t^{1/2}}{\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_a^x = 4\sqrt{x}$$

$$12 + 4\left(x^{1/2} - a^{1/2}\right) = 4\sqrt{x}$$

$$12 + 4\sqrt{x} - 4a^{1/2} = 4\sqrt{x}$$

$$a^{1/2} = 3$$

$$a = 9$$

Entonces $f(x) = 2x^{3/2}$ y $a = 9$