PROBLEMA RESUELTO 4

Encuentre volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar alrededor de la recta $x = 1$ la región limitada por la curva $y^2 + x - 1 = 0$ y la recta $x - 2y + 2 = 0$. Utilice el método de discos o anillos.

Solución

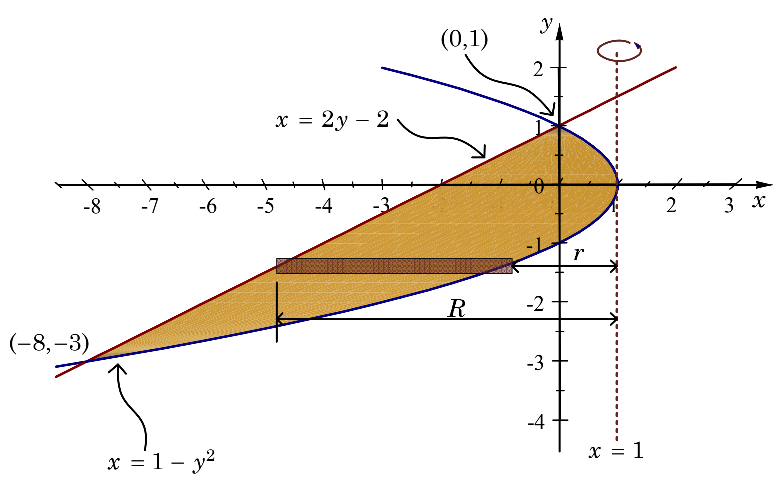
Como los puntos de intersección no se obtienen fácilmente, hay que resolver el sistema de ecuaciones. Despejando x en ambas ecuaciones e igualando se tiene

$$\begin{aligned} 1 - y^2 &= 2y - 2 \\ y^2 + 2y - 3 &= 0 \\ (y + 3)(y - 1) &= 0 \\ y &= -3, \quad y = 1 \end{aligned}$$

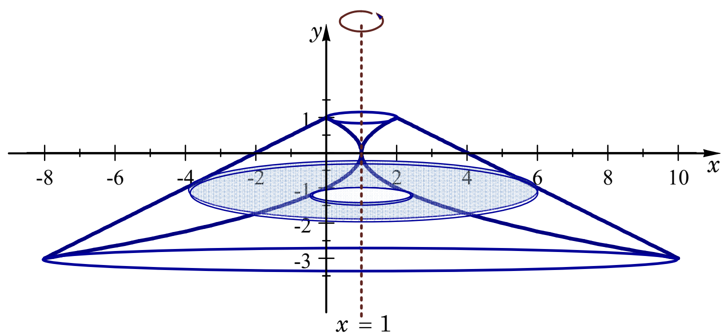
Al evaluar estos valores de y en cualquiera de las ecuaciones se obtiene que los puntos de intersección son

$$(-8,-3) \text{ y } (0,1)$$

La figura muestra la región del plano que se va a rotar, así como el eje de rotación. En la figura también se muestra un elemento diferencial. Observe que el diferencial no esta pegado al eje de rotación, por lo que los elementos diferenciales de volumen son anillos con un radio interior r y un radio exterior R.



En la siguiente figura se muestra un dibujo aproximado del sólido de revolución, se dibuja también un elemento diferencial que tiene la forma de un anillo, con centro en la recta $x = 1$



El volumen del sólido está dado por

$$V = \int_a^b \pi\left(R^2 - r^2\right)dy$$

Como se observa en la figura superior, el radio exterior del anillo R es la diferencia entre dos funciones cuya variable independiente es y. La mayor es la recta $x_1 = 1$ que corresponde al eje de rotación y la menor es la recta $x_2 = 2y - 2$

$$\begin{aligned} R &= x_1 - x_2 \\ &= (1) - (2y - 2) \\ &= 3 - 2y \end{aligned}$$

El radio interior del anillo r también es la diferencia entre dos funciones de variable independiente y, la mayor es la recta $x_1 = 1$ que corresponde al eje de rotación y la menor es la parábola $x_3 = 1 - y^2$, entonces

$$\begin{aligned} r &= x_1 - x_3 \\ &= (1) - (1 - y^2) \\ &= y^2 \end{aligned}$$

Los límites de integración se obtienen de la región que se esta rotando y como la variable de integración es y, los límites son de -3 y 1.

El volumen es

$$\begin{aligned} V &= \int_{-3}^{1} \pi(R^2 - r^2)dy \\ &= \int_{-3}^{1} \pi\left((3 - 2y)^2 - (y^2)^2\right)dy \\ &= \int_{-3}^{1} \pi\left(9 - 12y + 4y^2 - y^4\right)dy \\ &= \pi\left(9y - 6y^2 + \frac{4y^3}{3} - \frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_{-3}^{1} \\ &= \pi\left[\left(9(1) - 6(1)^2 + \frac{4(1)^3}{3} - \frac{(1)^5}{5}\right) - \left(9(-3) - 6(-3)^2 + \frac{4(-3)^3}{3} - \frac{(-3)^5}{5}\right)\right] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
V &= \pi\left[\left(9(1) - 6(1)^2 + \frac{4(1)^3}{3} - \frac{(1)^5}{5}\right) - \left(9(-3) - 6(-3)^2 + \frac{4(-3)^3}{3} - \frac{(-3)^5}{5}\right)\right] \\
&= \pi\left[\left(9 - 6 + \frac{4}{3} - \frac{1}{5}\right) - \left(-27 - 54 - 36 + \frac{243}{5}\right)\right] \\
&= \pi\left(\frac{62}{15} + \frac{342}{5}\right) \\
&= \frac{1088\pi}{15}
\end{aligned}
$$