PROBLEMA RESUELTO 4

Determine el valor de m de tal forma que la región por arriba de la recta $y = mx$ y por debajo de la parábola $y = 2x - x^2$ tenga un área de 36 unidades cuadradas

Solución

Encontrando los puntos de intersección entre la parábola y la recta

$$mx = 2x - x^2$$

$$x^2 + mx - 2x = 0$$

$$x^2 + (m-2)x = 0$$

$$x(x + m - 2) = 0$$

$$x = 0, x = 2 - m$$

Al evaluar en la ecuación de la recta se obtienen las coordenadas en y de los puntos de intersección

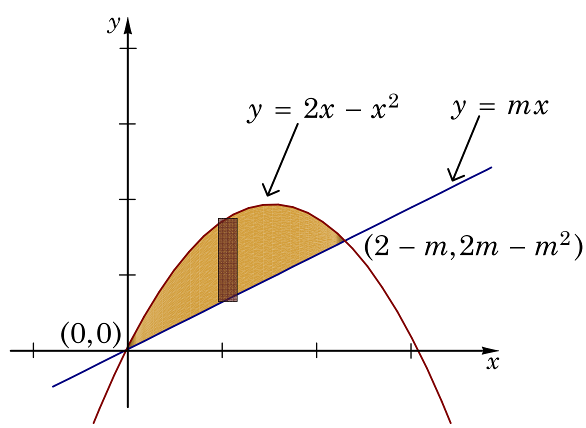
Si $x = 0$ se obtiene $y = 0$

Si $x = 2 - m$ se obtiene $y = m(2-m) = \left(2m - m^2\right)$

Los puntos de intersección son

$$(0,0) \text{ y } (2-m, 2m - m^2)$$

La siguiente figura muestra la región cuya área tiene valor de 36 unidades cuadradas



El área de la región está dada por

$$A = \int_0^{2-m} [f(x) - g(x)]dx$$

$$= \int_0^{2-m} \left[\left(2x - x^2\right) - (mx)\right]dx$$

$$= \int_0^{2-m} \left(2x - x^2 - mx\right)dx$$

$$
\begin{aligned}
A &= \left(x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{mx^2}{2} \right)\Bigg|_0^{2-m} \\
&= \left((2-m)^2 - \frac{(2-m)^3}{3} - \frac{m(2-m)^2}{2} \right) - \left((0)^2 - \frac{(0)^3}{3} - \frac{m(0)^2}{2} \right) \\
&= (2-m)^2 \left(1 - \frac{(2-m)}{3} - \frac{m}{2} \right) \\
&= \frac{(2-m)^2(6 - 4 + 2m - 3m)}{6} \\
&= \frac{(2-m)^2(2-m)}{6} \\
&= \frac{(2-m)^3}{6}
\end{aligned}
$$

Como el área tiene un valor de 36

$$
\begin{aligned}
36 &= \frac{(2-m)^3}{6} \\
216 &= (2-m)^3 \\
2 - m &= \sqrt[3]{216} \\
m &= 2 - \sqrt[3]{216} \\
m &= 2 - 6 \\
m &= -4
\end{aligned}
$$

Por lo que el valor de la pendiente de la recta es $m = -4$