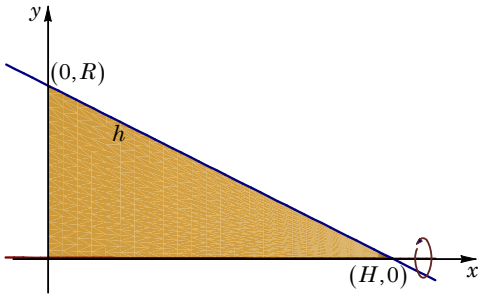
PROBLEMA RESUELTO 3

Utilice el método de capas cilíndricas, para demostrar que el volumen de un cono de radio R y altura H está dado por

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

Solución

Un cono se puede generar al rotar alrededor del eje x la recta que pasa por los puntos $(0,R)$ y $(H,0)$ como se muestra en la siguiente figura



La pendiente de la recta es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{R - 0}{0 - H} = -\frac{R}{H}$$

La ecuación de la recta que genera el cono es

$$y - y_2 = m(x - x_2)$$

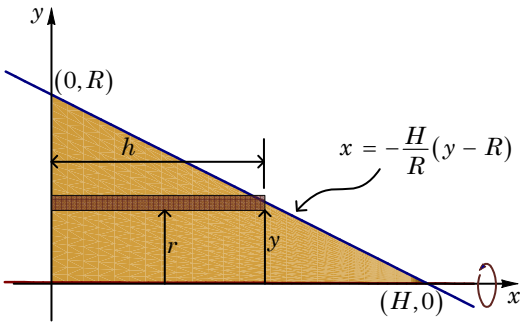
$$y - R = -\frac{R}{H}(x - 0)$$

$$y = -\frac{R}{H}x + R$$

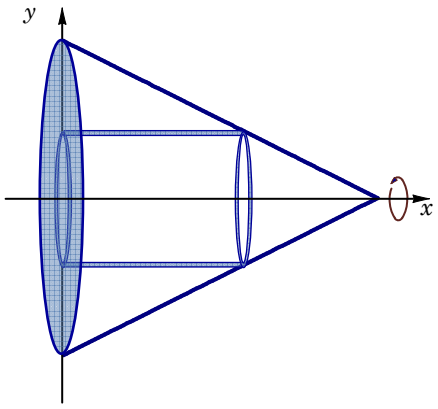
Como en el eje es paralelo al eje x la variable de integración es y, se debe expresar la función en términos de y

$$x = -\frac{H}{R}(y - R)$$

Ahora se dibuja la región del plano que se va a girar, el eje de rotación y un elemento diferencial de área paralelo al eje de rotación. En la misma figura se indica el radio de la capa cilíndrica y su altura.



En la siguiente figura se muestra un dibujo aproximado del sólido de revolución, se dibuja también un elemento diferencial que tiene la forma de una capa cilíndrica con su eje en el eje de revolución.



El volumen del sólido está dado por

$$V = \int_a^b 2\pi r h\, dy$$

Como se observa en la primera figura, el radio r de la capa cilíndrica es igual a y, entonces

$$r = y$$

La altura h de la capa cilíndrica es igual a x, es decir

$$h = x$$

$$= -\frac{H}{R}(y - R)$$

Los límites te integración se obtienen de la región que está rotando. Como la variable de integración es y los limites van de 0 a R

Entonces, la integral para calcular el volumen del sólido es

$$V = \int_0^R 2\pi(y)\left(-\frac{H}{R}(y - R)\right) dy$$

$$= -\frac{2\pi H}{R}\int_0^R \left(y^2 - Ry\right) dy$$

$$= -\frac{2\pi H}{R}\left[\frac{1}{3}y^3 - \frac{R}{2}y^2\right]_0^R$$

$$= -\frac{2\pi H}{R}\left[\left(\frac{1}{3}R^3 - \frac{R}{2}R^2\right) - (0)\right]$$

$$= -\frac{2\pi H}{R}\left(\frac{R^3}{3} - \frac{R^3}{2}\right)$$

$$= -\frac{2\pi H}{R}\left(\frac{2R^3 - 3R^3}{6}\right)$$

$$= \frac{2\pi H}{R}\left(\frac{R^3}{6}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\pi R^2 H$$