PROBLEMA RESUELTO 3

Utilice la parte 2 del teorema fundamental del cálculo para calcular

a. $\dfrac{d}{dx}\left[\int_1^x \left(\sqrt{t^2+4}\right)dt\right]$ **b.** $\dfrac{d}{dx}\left[\int_3^{\ln x} \left(\sqrt{t^2+4}\right)dt\right]$ **c.** $\dfrac{d}{dx}\left[\int_{3x+1}^{\cos x} \operatorname{sen}^{-1} t\, dt\right]$

Solución

a. Calcule

$$\frac{d}{dx}\left[\int_1^x \left(\sqrt{t^2+4}\right)dt\right]$$

Como el límite inferior es una constante y el límite superior es x, se aplica directamente la parte 2 del teorema fundamental del cálculo

$$\frac{d}{dx}\left[\int_1^x \left(\sqrt{t^2+4}\right)dt\right] = \sqrt{x^2+4}$$

b. Calcule

$$\frac{d}{dx}\left[\int_3^{\ln x} \left(\sqrt{t^2+4}\right)dt\right]$$

Como el límite superior es una función, es necesario utilizar la regla de la cadena para calcular la derivada. La regla de la cadena en su forma diferencial es la siguiente

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

Haciendo la sustitución

$$u = \ln x$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$$

Al aplicar la regla de la cadena en este problema se tiene

$$\frac{d}{dx}\left[\int_3^{\ln x} \left(\sqrt{t^2+4}\right)dt\right] = \frac{d}{du}\left[\int_3^{u} \left(\sqrt{t^2+4}\right)dt\right]\cdot\frac{du}{dx}$$

Ahora la integral tiene como limite superior a la variable u y satisface las condiciones del teorema

$$\frac{d}{dx}\left[\int_3^{\ln x} \left(\sqrt{t^2+4}\right)dt\right] = \sqrt{u^2+4}\cdot\frac{du}{dx}$$

La respuesta se debe expresar en términos de x

$$\frac{d}{dx}\left[\int_3^{\ln x} \left(\sqrt{t^2+4}\right)dt\right] = \sqrt{(\ln x)^2+4}\cdot\frac{1}{x}$$

c. Calcule

$$\frac{d}{dx}\left[\int_{3x+1}^{\cos x} \operatorname{sen}^{-1} t\, dt\right]$$

Observe que el límite inferior y el límite superior son funciones, para utilizar el teorema fundamental, es necesario dividir la integral en dos integrales

$$\frac{d}{dx}\left[\int_{3x+1}^{\cos x} \operatorname{sen}^{-1} t\, dt\right] = \frac{d}{dx}\left[\int_{3x+1}^{0} \operatorname{sen}^{-1} t\, dt + \int_{0}^{\cos x} \operatorname{sen}^{-1} t\, dt\right]$$

$$= \frac{d}{dx}\left[\int_{3x+1}^{0} \operatorname{sen}^{-1} t\, dt\right] + \frac{d}{dx}\left[\int_{0}^{\cos x} \operatorname{sen}^{-1} t\, dt\right]$$

Cada una de las derivadas se calcula por separado.

En la primera integral se invierte el orden de integración para utilizar el teorema fundamental

$$\frac{d}{dx}\left[\int_{3x+1}^{0} \operatorname{sen}^{-1} t\, dt\right] = \frac{d}{dx}\left[-\int_{0}^{3x+1} \operatorname{sen}^{-1} t\, dt\right]$$

Ahora se procede como en el inciso (b)

Haciendo la sustitución

$$u = 3x + 1$$

$$\frac{du}{dx} = 3$$

$$\frac{d}{dx}\left[\int_{3x+1}^{0} \operatorname{sen}^{-1} t\, dt\right] = -\frac{d}{dx}\left[\int_{0}^{3x+1} \operatorname{sen}^{-1} t\, dt\right] = -\frac{d}{du}\left[\int_{0}^{u} \operatorname{sen}^{-1} t\, dt\right] \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= -\left(\operatorname{sen}^{-1} u\right)(3)$$

$$= -3\operatorname{sen}^{-1}(3x + 1)$$

En la segunda integral se procede de forma similar

$$\frac{d}{dx}\left[\int_{0}^{\cos x} \operatorname{sen}^{-1} t\, dt\right]$$

Haciendo la sustitución

$$u = \cos x$$

$$\frac{du}{dx} = -\operatorname{sen} x$$

$$\frac{d}{dx}\left[\int_{0}^{\cos x} \operatorname{sen}^{-1} t\, dt\right] = \frac{d}{du}\left[\int_{0}^{u} \operatorname{sen}^{-1} t\, dt\right] \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \operatorname{sen}^{-1} u \cdot \frac{du}{dx} = \operatorname{sen}^{-1}(\cos x) \cdot (-\operatorname{sen} x)$$

$$= -\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen}^{-1}(\cos x)$$

Al combinar las dos derivadas se obtiene la respuesta del problema

$$\frac{d}{dx}\left[\int_{3x+1}^{\cos x} \operatorname{sen}^{-1} t\, dt\right] = -3\operatorname{sen}^{-1}(3x + 1) - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen}^{-1}(\cos x)$$