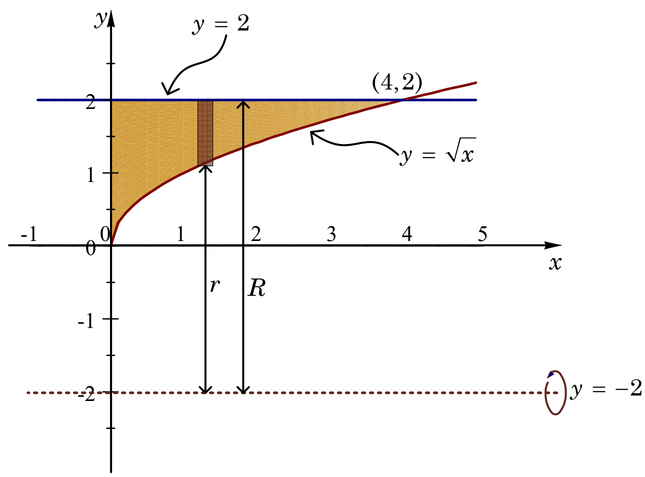
PROBLEMA RESUELTO 3

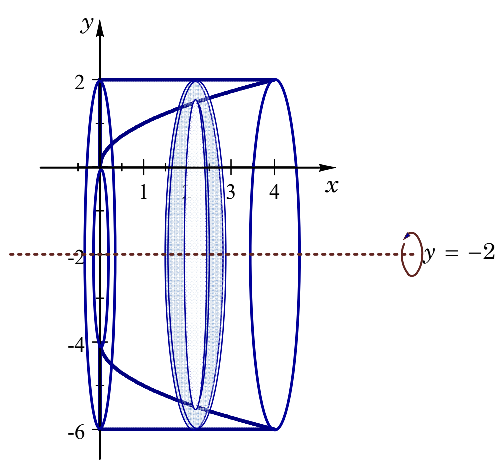
Encuentre volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar alrededor de la recta $y = -2$ la región limitada por la curva $y = \sqrt{x}$, la recta $y = 2$ y el eje y. Utilice el método de discos o anillos

Solución

La figura muestra la región del plano que se va a rotar, así como el eje de rotación. En la figura también se muestra un elemento diferencial. Observe que el diferencial no esta pegado al eje de rotación, por lo que los elementos diferenciales de volumen son anillos con un radio interior r y un radio exterior R.



En la siguiente figura se muestra un dibujo aproximado del sólido de revolución, se dibuja también un elemento diferencial que tiene la forma de un anillo, con centro en la recta $y = -2$



El volumen del sólido está dado por

$$V = \int_a^b \pi\left(R^2 - r^2\right)dx$$

Como se observa en la figura superior, el radio exterior del anillo *R,* es la diferencia entre dos funciones cuya variable independiente es x. La mayor es la recta $y_1 = 2$ y la menor es la recta que corresponde al eje de rotación $y_2 = -2$, entonces

$$\begin{aligned} R &= y_1 - y_2 \\ &= (2) - (-2) \\ &= 4 \end{aligned}$$

El radio interior del anillo r también es la diferencia entre dos funciones, la mayor es la función raíz cuadrada $y_3 = \sqrt{x}$ y la menor es la recta horizontal que corresponde al eje de rotación $y_2 = -2$, entonces

$$\begin{aligned} r &= y_3 - y_2 \\ &= (\sqrt{x}) - (-2) \\ &= \sqrt{x} + 2 \end{aligned}$$

Los límites de integración se obtienen de la región que se esta rotando y como la variable de integración es x, los límites son 0 y 4.

El volumen es

$$\begin{aligned} V &= \int_0^4 \pi(R^2 - r^2)dx \\ &= \int_0^4 \pi\left[4^2 - \left(\sqrt{x} + 2\right)^2\right]dx \\ &= \pi\int_0^4 \left(16 - x - 4\sqrt{x} - 4\right)dx \\ &\pi\int_0^4 \left(12 - x - 4x^{1/2}\right)dx \\ &= \pi\left(12x - \frac{x^2}{2} - \frac{8x^{3/2}}{3}\right)\Bigg|_0^4 \\ &= \pi\left(12(4) - \frac{16}{2} - \frac{8(4)^{3/2}}{3}\right) - (0) \\ &= \pi\left(48 - 8 - \frac{64}{3}\right) \\ &= \frac{56\pi}{3} \end{aligned}$$