PROBLEMA RESUELTO 3

Encuentre el área de la región limitada por la parábola $y^2 + 2x - 6 = 0$ y la recta $x + y + 1 = 0$

Solución

Despejando x en cada ecuación y luego igualando para encontrar los puntos de intersección

$$\frac{y^2 - 6}{-2} = -1 - y$$

$$y^2 - 6 = 2 + 2y$$

$$y^2 - 2y - 8 = 0$$

$$(y + 2)(y - 4) = 0$$

$$y = -2, y = 4$$

Al evaluar en cualquiera de las dos ecuaciones

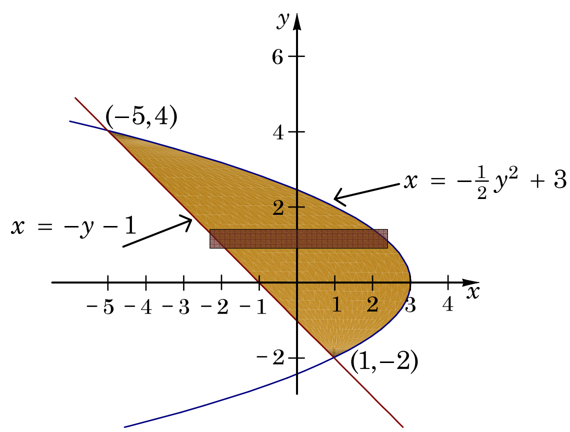
si $y = -2$, $\quad x = -y - 1 = -(-2) - 1 = 1$

si $y = 4$, $\quad x = -y - 1 = -(4) - 1 = -5$

Se obtiene que los puntos de intersección son

$$(1, -2) \quad \text{y} \quad (-5, 4)$$

La siguiente figura muestra la gráfica de la parábola horizontal y la recta



Observe que es más sencillo utilizar como eje de integración el eje y, ya que ambas ecuaciones se pueden expresar como funciones de variable y, donde la función mayor es la parábola $f(y) = -\frac{1}{2}y^2 + 3$ que se encuentra a la derecha y la función menor es la recta $g(y) = -y - 1$. que se encuentra a la izquierda de la parábola.

El área de la región entre las curvas esta dada por

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-2}^{4} [f(y) - g(y)]\,dy \\
&= \int_{-2}^{4} \left[\left(-\frac{1}{2}y^2 + 3\right) - (-y - 1)\right] dy \\
&= \int_{-2}^{4} \left[-\frac{1}{2}y^2 + y + 4\right] dy \\
&= \left(-\frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{2}y^2 + 4y\right)\Bigg|_{-2}^{4} \\
&= \left(-\frac{1}{6}(4)^3 + \frac{1}{2}(4)^2 + 4(4)\right) - \left(-\frac{1}{6}(-2)^3 + \frac{1}{2}(-2)^2 + 4(-2)\right) \\
&= \left(\frac{40}{3}\right) - \left(-\frac{14}{3}\right) \\
&= 18
\end{aligned}
$$