PROBLEMA RESUELTO 2

Plantee la integral para calcular el volumen del sólido de revolución que se obtiene al rotar alrededor de la recta $x = -\frac{\pi}{8}$, la región en el primer cuadrante, limitada por el eje y las curvas $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x$ hasta su primer punto de intersección. Utilice el método de capas cilíndricas.

Solución

Igualando las funciones para encontrar los puntos de intersección

$$\operatorname{sen} x = \cos x$$

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = 1$$

$$\tan x = 1$$

Al utilizar funciones trigonométricas inversas para despejar x se tiene

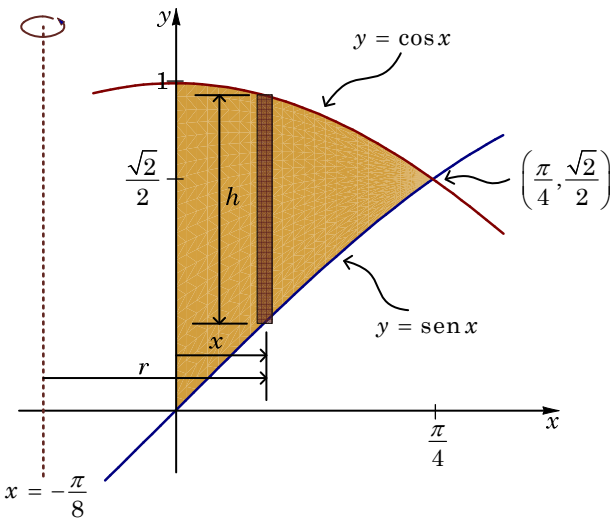
$$x = \tan^{-1}(1)$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

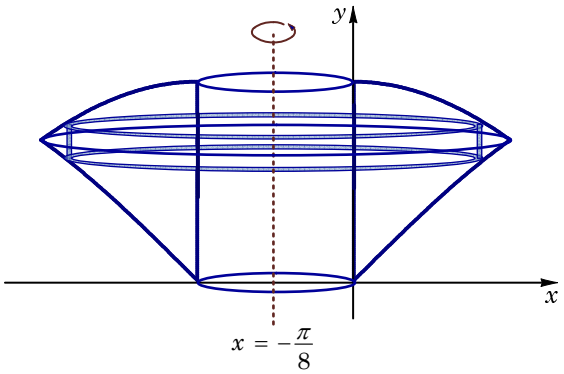
Entonces las coordenadas del primer punto de intersección de las curvas son

$$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Ahora se dibuja la región del plano que se va a girar, el eje de rotación y un elemento diferencial de área paralelo al eje de rotación. En la misma figura se indica el radio de la capa cilíndrica y su altura.



En la siguiente figura se muestra un dibujo aproximado del sólido de revolución, se dibuja también un elemento diferencial que tiene la forma de una capa cilíndrica con su eje en el eje de revolución.



El volumen del sólido está dado por

$$V = \int_a^b 2\pi r h dx$$

Como se observa en la primera figura, el radio r es la diferencia entre dos valores de x, el valor mayor es x que corresponde a la variable de integración y el menor es $x = -\frac{\pi}{8}$, que corresponde al eje de rotación

$$r = x - \left(-\frac{\pi}{8}\right)$$

$$= x + \frac{\pi}{8}$$

La altura h de la capa cilíndrica es la diferencia de dos funciones, la mayor es la función $y_2 = \cos x$ y la menor es la función $y_1 = \operatorname{sen} x$, por lo que la altura de la capa cilíndrica es

$$h = y_2 - y_1$$

$$= \cos x - \operatorname{sen} x$$

Los límites te integración se obtienen de la región que está rotando. Como la variable de integración es x los limites van de 0 a $\frac{\pi}{4}$

Entonces, la integral para calcular el volumen del sólido es

$$V = \int_0^{\pi/4} 2\pi\left(x + \frac{\pi}{8}\right)(\cos x - \operatorname{sen} x)dx$$

$$= 2\pi\int_0^{\pi/4} \left(x + \frac{\pi}{8}\right)(\cos x - \operatorname{sen} x)dx$$

Nota: para calcular esta integral se requieren técnicas de integración mas avanzadas que se estudian en el curso Matemática intermedia 1