UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CURSO:	MATEMÁTICA BÁSICA 2
TIPO DE EXAMEN:	Primer Examen Parcial Vacaciones diciembre 2014
RESUELTO POR:	Javier Alejandro López Guerrero
REVISADA POR:	Lic. Carlos Morales

TEMA 1. (20 puntos)

Sea la función

$$f(x) = x^3 + 3$$

Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva de la función dada y que al mismo tiempo pase por el punto $P(-1, -2)$. Para el efecto, siga el siguiente procedimiento

a) Encuentre la derivada de la función utilizando la definición de derivada por limite y luego compruebe por regla de derivada
b) Plantee las ecuaciones necesarias para encontrar el punto de tangencia
c) Determine la ecuación solicitada

TEMA 2. (20 puntos)

Encuentre el valor del límite, si existe, si no lo hay explique porque:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{4x+5}{\sqrt{x^2-2x}}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \left[\frac{sen^3(x)}{x(\cos(x)-1)}\right]$

TEMA 3. (20 puntos)

Encuentre $\frac{dz}{dw}$

a) $e^{zw} + \tan(z) = \csc(2w)$

b) $z = [\cos(w^2)]^{e^{sen(w^2)}}$

TEMA 4. (25 puntos)

Grafique la curva de la función $g(x)$, sabiendo que es una función "impar" y cumple con las siguientes condiciones:

1. $g(0) = 0$ $\quad$ $g'(0) = 0$
2. $g'_{-}(x = 2) = 4$ $\quad$ $g'_{+}(x = 2) = -0.5$
3. $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x) = 4$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x) = 4$ $\quad$ $g(2) = 6$
4. $\lim\limits_{x \to 3^-} g(x) = -\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to 3^+} g(x) = -\infty$
5. $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 4$

TEMA 5. (15 puntos)

Dada la función:

$$h(x) = |4 - x^2|$$

a) Por definición de continuidad, demuestre que la función es continua en $x = 2$
b) Por definición de diferenciabilidad, demuestre que la derivada de la función en $x = 2$no existe.

TEMA 1. (20 puntos)

Sea la función

$$f(x) = x^3 + 3$$

Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva de la función dada y que al mismo tiempo pase por el punto $P(-1,-2)$. Para el efecto, siga el siguiente procedimiento

a) Encuentre la derivada de la función utilizando la definición de derivada por limite y luego compruebe por regla de derivada

$$f(x) = x^3 + 3$$

La definición de derivada por limite indica que

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Entonces

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\{(x+h)^3 + 3\} - (x^3 + 3)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 + 3) - (x^3 + 3)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 + 3 - x^3 - 3}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h}$$

Aplicando factor común h

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} 3x^2 + 3xh + h^2$$

Valuando el límite

$$f'(x) = 3x^2 + 0 + 0$$

$$f'(x) = 3x^2$$

Comprobando el resultado con la regla de la cadena

$$f'(x) = 3x^{3-1}$$

$$f'(x) = 3x^2$$

b) Plantee las ecuaciones necesarias para encontrar el punto de tangencia

Verificando que $P(-1,-2)$ se encuentra en la función $f(x) = x^3 + 3$

$$-2 = (-1)^3 + 3$$

$$-2 = -1 + 3$$

$$-2 \neq 2$$

Al no cumplir la igualdad, el punto $P(-1,-2)$ no está sobre la recta.

Definiendo un nuevo punto de tangencia, sea el punto de tangencia $(a, f(a))$

Sustituyendo el punto de tangencia $(a, f(a))$ en la ecuación de la recta y despejando "*m*" se obtiene

$$m = \frac{f(a) - (-2)}{a - (-1)}$$

$$\boldsymbol{m = \frac{f(a) + 2}{a + 1}}$$

Sustituyendo el punto de tangencia $\left(a, f(a2)\right)$ en $f(x) = x^3 + 3$ se obtiene

$$\boldsymbol{f(a) = a^3 + 3}$$

Entonces

$$\boldsymbol{f'(a) = 3a^2}$$

Dado que la derivada de una función es la pendiente de la recta tangente

$$m = f'(a)$$

Igualando las ecuaciones obtenemos

$$\frac{f(a) + 2}{a + 1} = 3a^2$$

Sustituyendo $f(a)$ en la igualdad anterior se obtiene

$$\frac{(a^3 + 3) + 2}{a + 1} = 3a^2$$

$$a^3 + 5 = 3a^2(a + 1)$$

$$a^3 + 5 = 3a^3 + 3a^2$$

$$2a^3 + 3a^2 - 5 = 0$$

Resolviendo la ecuación se obtienen los valores de a los cuales son

$$\boldsymbol{a_1 = 1}$$
$$a_2 = -1.25 - 0.968245i$$
$$a_3 = -1.25 + 0.968246i$$

Por tanto el valor es $\boldsymbol{a_1 = 1}$

Entonces

$$f(a) = a^3 + 3$$

$$f(1) = 1^3 + 3$$

$$\boldsymbol{f(1) = 4}$$

Sustituyendo los valores de $(a, f(a))$ en la ecuación *"m"*

$$m = \frac{4+2}{1+1}$$

$$m = \frac{6}{2}$$

$$\boldsymbol{m = 3}$$

c) Determine la ecuación solicitada

La ecuación de la recta está definida por

$$(y - y_0) = m(x - x_0)$$

Sustituyendo el punto $P(-1,-2)$ y $m = 3$ en la ecuación de la recta

$$(y - (-2)) = 3(x - (-1))$$

$$(y + 2) = 3(x + 1)$$

$$y + 2 = 3x + 3$$

$$\boldsymbol{y = 3x + 1}$$

TEMA 2. (20 puntos)

Encuentre el valor del límite, si existe, si no lo hay explique porque:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4x+5}{\sqrt{x^2-2x}}$

Sabiendo que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(-x)$$

Entonces

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4x+5}{\sqrt{x^2-2x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{4(-x)+5}{\sqrt{(-x)^2-2(-x)}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-4x+5}{\sqrt{x^2+2x}}$$

Dividiendo dentro de $\frac{1}{\sqrt{x^2}}$ al numerador y denominador

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-4x+5}{\sqrt{x^2}}}{\frac{\sqrt{x^2+2x}}{\sqrt{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-4x+5}{x}}{\sqrt{\frac{x^2+2x}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-4x+5}{x}}{\sqrt{\frac{x^2+2x}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-4x}{x}+\frac{5}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-4x}{x}+\frac{5}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-4+\frac{5}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}}$$

Aplicando el límite

$$= \frac{-4+0}{\sqrt{1+0}}$$

$$= -4$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{4x+5}{\sqrt{x^2-2x}} = -4$$

b) $\lim_{x \to 0} \left[\frac{sen^3(x)}{x(\cos(x)-1)}\right]$

$$\lim_{x \to 0} \left[\frac{sen^3(x)}{x(\cos(x)-1)}\right]$$

Reescribiendo la expresión del numerador se obtiene

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{sen^2(x) * sen(x)}{x(\cos(x)-1)}\right]$$

Reescribiendo la función se obtiene

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{sen(x)}{x} * \frac{sen^2(x)}{(\cos(x)-1)}\right]$$

Por definición

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1$$

Entonces

$$= \lim_{x \to 0} \left[1 * \frac{sen^2(x)}{(\cos(x)-1)}\right]$$

Aplicando la identidad

$$sen^2(x) + cos^2(x) = 1$$

Reescribiendo la identidad anterior

$$sen^2(x) = 1 - cos^2(x)$$

Entonces

$$= \lim_{x \to 0} \left[1 * \frac{(1 - cos^2(x))}{(\cos(x)-1)}\right]$$

Aplicando diferencia de cuadrados se obtiene

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{\big(1 - cos(x)\big) * (1 + \cos(x))}{(\cos(x) - 1)} \right]$$

Aplicando factor común a la expresión del denominador se obtiene

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{\big(1 - cos(x)\big) * (1 + \cos(x))}{(-1)(-\cos(x) + 1)} \right]$$

Reescribiendo la expresión del denominador se obtiene

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{\big(1 - cos(x)\big) * (1 + \cos(x))}{(-1)(1 - \cos(x))} \right]$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{(1 + \cos(x))}{(-1)} \right]$$

$$= \lim_{x \to 0} [-(1 + \cos(x)]$$

Valuando el límite

$$= [-(1 + \cos(0)]$$

$$= [-(1 + 1)]$$

$$= -2$$

$$\boldsymbol{\lim_{x \to 0} \left[\frac{sen^3(x)}{x(\cos(x) - 1)} \right] = -2}$$

TEMA 3. (20 puntos)

Encuentre $\frac{dz}{dw}$

a) $e^{zw} + \tan(x) = \csc(2w)$

$$e^{zw} + \tan(z) = \csc(2w)$$

Derivando implícitamente se obtiene

$$e^{zw}\left(w\frac{dz}{dw} + z\right) + sec^2(z)\frac{dz}{dw} = -2\csc(2w)\cot(2w)$$

Expandiendo la función se obtiene

$$w * e^{zw}\frac{dz}{dw} + z * e^{zw} + sec^2(z)\frac{dz}{dw} = -2\csc(2w)\cot(2w)$$

Agrupando $\frac{dz}{dw}$

$$w * e^{zw}\frac{dz}{dw} + sec^2(z)\frac{dz}{dw} + z * e^{zw} = -2\csc(2w)\cot(2w)$$

Aplicando factor común $\frac{dz}{dw}$

$$\frac{dz}{dw}(w * e^{zw} + sec^2(z)) + z * e^{zw} = -2\csc(2w)\cot(2w)$$

Reescribiendo la función se obtiene

$$\frac{dz}{dw}(w * e^{zw} + sec^2(z)) = -2\csc(2w)\cot(2w) - z * e^{zw}$$

Despejando $\frac{dz}{dw}$

$$\boldsymbol{\frac{dz}{dw} = \frac{-2\csc(2w)\cot(2w) - z * e^{zw}}{(w * e^{zw} + sec^2(z))}}$$

b) $z = [\cos(w^2)]^{e^{sen(w^2)}}$

$$z = [\cos(w^2)]^{e^{sen(w^2)}}$$

Aplicando Ln en ambos lados de la igualdad

$$\ln[z] = e^{sen(w^2)} * \ln|\cos(w^2)|$$

Derivando implícitamente

$$\frac{1}{z} * \frac{dz}{dw} = e^{sen(w^2)} * cos(w^2) * 2w * \ln|\cos(w^2)| + e^{sen(w^2)} * \frac{1}{\cos(w^2)} * -sen(w^2) * 2w$$

$$\frac{1}{z} * \frac{dz}{dw} = e^{sen(w^2)} * cos(w^2) * 2w * \ln|\cos(w^2)| - e^{sen(w^2)} * \frac{sen(w^2)}{\cos(w^2)} * 2w$$

$$\frac{1}{z} * \frac{dz}{dw} = e^{sen(w^2)} * cos(w^2) * 2w * \ln|\cos(w^2)| - e^{sen(w^2)} * \tan(w^2) * 2w$$

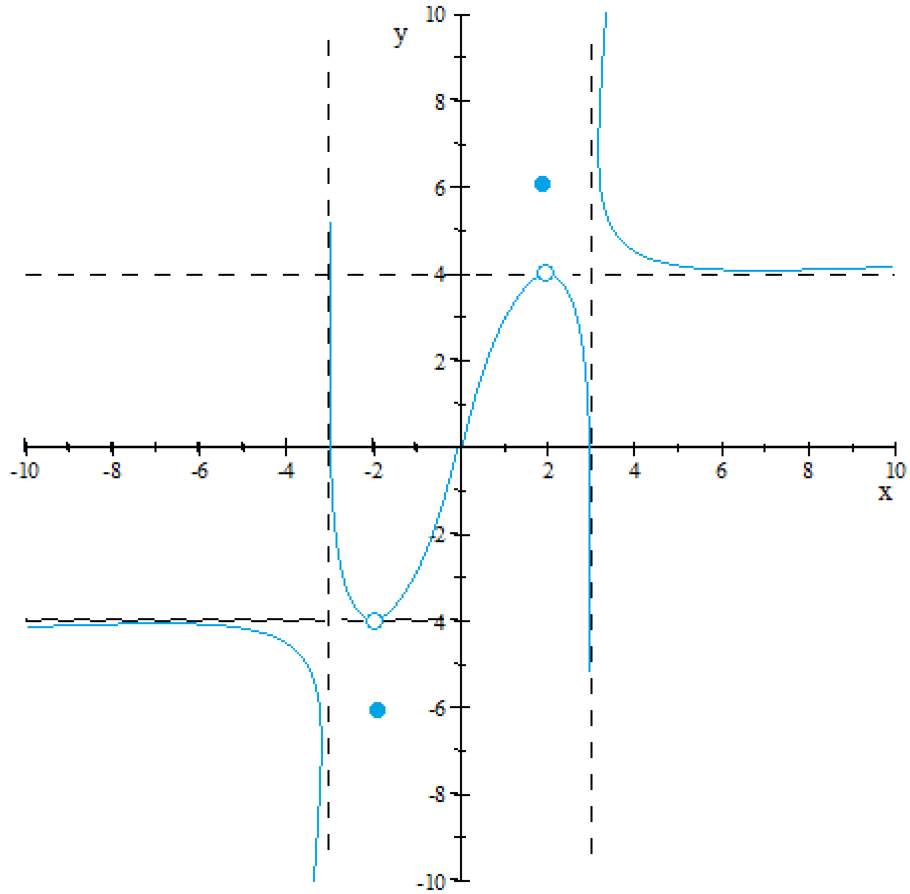
$$\frac{1}{z} * \frac{dz}{dw} = 2w * e^{sen(w^2)}[cos(w^2) * \ln|\cos(w^2)| - \tan(w^2)]$$

$$\boldsymbol{\frac{dz}{dw} = 2wz * e^{sen(w^2)}[cos(w^2) * \ln\left|\cos(w^2)\right| - \tan(w^2)]}$$

TEMA 4. (25 puntos)

Grafique la curva de la función $g(x)$, sabiendo que es una función "impar" y cumple con las siguientes condiciones:

1. $g(0) = 0$ $\quad$ $g'(0) = 0$
2. $g'_{-}(x = 2) = 4$ $\quad$ $g'_{+}(x = 2) = -0.5$
3. $\lim_{x\to 2^-} g(x) = 4$ $\quad$ $\lim_{x\to 2^+} g(x) = 4$ $\quad$ $g(2) = 6$
4. $\lim_{x\to 3^-} g(x) = -\infty$ $\quad$ $\lim_{x\to 3^+} g(x) = -\infty$
5. $\lim_{x\to +\infty} g(x) = 4$



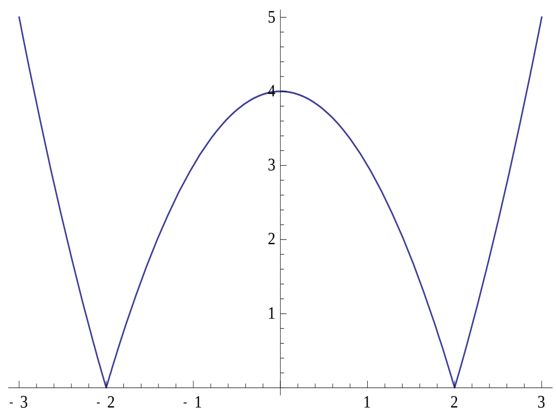
TEMA 5. (15 puntos)

Dada la función:

$$h(x) = |4 - x^2|$$

a) Por definición de continuidad, demuestre que la función es continua en $x = 2$
b) Por definición de diferenciabilidad, demuestre que la derivada de la función en $x = 2$no existe.

Graficando la función $h(x)$



$$4 - x^2 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

Intervalos	Valor (x)	Signo h(x)
$(-\infty, -2)$	-3	-
$(-2,2)$	0	+
$(2, \infty)$	3	-

$$h(x) = \begin{cases} -(4 - x^2) & x < -2 \\ +(4 - x^2) & -2 \leq x < 2 \\ -(4 - x^2) & x \geq 2 \end{cases}$$

a) Por definición de continuidad, demuestre que la función es continua en $x = 2$

El teorema de continuidad nos indica que na función f es continua sobre un intervalo si es continua en cada número en el intervalo. Además

Una función f es continua por la derecha de un número en $x = a$ si

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

Y f es continua por la izquierda de $x = a$ si

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

Aplicando los teoremas anteriores entonces

La función $h(x)$es continua por la derecha de un número en $x = 2$ si

$$\lim_{x \to 2^+} h(x) = h(2)$$

$$\lim_{x \to 2^+} (4 - x^2) = h(2)$$

Aplicando el límite por la derecha se obtiene

$$h(2) = 0$$

Y $h(x)$ es continua por la izquierda de $x = 2$ si

$$\lim_{x \to a^-} h(x) = h(a)$$

$$\lim_{x \to 2^-} -(4 - x^2) = h(2)$$

Aplicando el limite por la izquierda se obtiene que

$$h(2) = 0$$

Entonces

$$\boldsymbol{\lim_{x \to 2^+} (4 - x^2) = \lim_{x \to 2^-} -(4 - x^2) = h(2) = 0}$$

La función en $x = 2$ es continúa.

b) Por definición de diferenciabilidad, demuestre que la derivada de la función en $x = 2$ no existe.

Una función f es derivable en $x = a$ si $f'(a)$ existe.

$$f'(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$f'(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Una función $h(x)$ es derivable en $x = 2$ si $h'(2)$ existe.

Aplicando el límite por la derecha en $x = 2$ se obtiene

$$h'(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{h(x) - h(a)}{x - a}$$

$$h'(2) = \lim_{x \to a^+} \frac{h(x) - h(2)}{x - 2}$$

$$h'(2) = \lim_{x \to 2^+} \frac{+(4 - x^2) - h(2)}{x - 2}$$

Del inciso anterior se obtuvo que $h(2)$ =0, entonces:

$$h'(2) = \lim_{x \to 2^+} \frac{4 - x^2}{x - 2}$$

$$h'(2) = \lim_{x \to 2^+} \frac{(2 - x)(2 + x)}{x - 2}$$

$$h'(2) = \lim_{x \to 2^+} \frac{(2 - x)(2 + x)}{-1(2 - x)}$$

$$h'(2) = \lim_{x \to 2^+} -(2 + x)$$

$$h'(2) = -(2 + 2) = -4$$

Aplicando el límite por la izquierda en $x = 2$ se obtiene

$$h'(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{h(x) - h(a)}{x - a}$$

$$h'(2) = \lim_{x \to 2^-} \frac{h(x) - h(2)}{x - 2}$$

$$h'(2) = \lim_{x \to 2^-} \frac{-(4 - x^2) - h(2)}{x - 2}$$

Del inciso anterior se obtuvo que $h(2)$ =0, entonces:

$$h'(2) = \lim_{x \to 2^-} \frac{-(4 - x^2)}{x - 2}$$

$$h'(2) = \lim_{x \to 2^-} \frac{-(2 - x)(2 + x)}{x - 2}$$

$$h'(2) = \lim_{x \to 2^-} \frac{-(2 - x)(2 + x)}{-(2 - x)}$$

$$h'(2) = \lim_{x \to 2^-} (2 + x)$$

$$h'(2) = 2 + 2 = 4$$

Entonces

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{+(4 - x^2) - h(2)}{x - 2} \neq \lim_{x \to 2^-} \frac{-(4 - x^2) - h(2)}{x - 2}$$

$$h'(2)_+ \neq h'(2)_-$$

$$-4 \neq 4$$

Se demuestra por definición de diferenciabilidad, que la derivada de la función en $x = 2$ no existe, ya que $\lim_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \neq \lim_{x \to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$