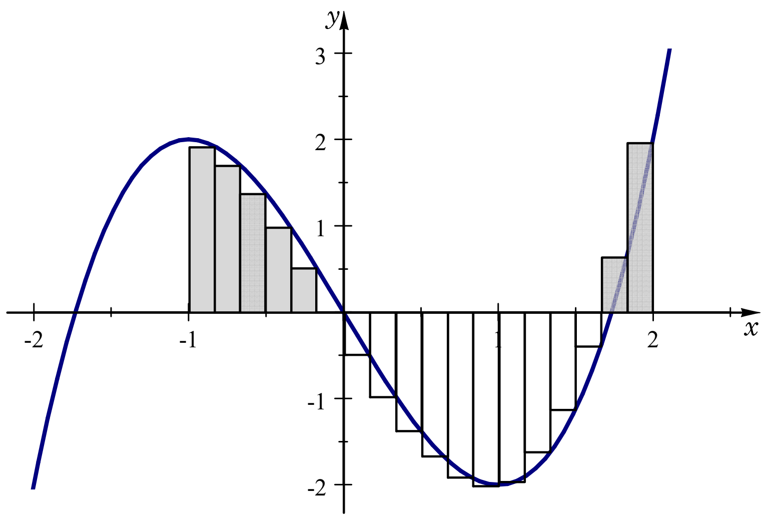
PROBLEMA RESUELTO 2

Utilice la definición de integral definida para calcular la integral

$$\int_{-1}^{2}(x^3 - 2x)dx$$

Solución

a. La figura muestra la gráfica de le función. En el intervalo $\left[-1,2\right]$ se han dibujado en color gris los rectángulos cundo la función es positiva y en color blanco los rectángulos cuando la función es negativa.



La integral definida está dada por

$$\int_{-1}^{2}(x^3 - 2x)dx = \lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$$

Si la partición es regular, es decir que todos los rectángulos tienen el mismo ancho Δx. La integral anterior es equivalente a

$$\int_{-1}^{2}(x^3 - 2x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$$

Donde

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-(-1)}{n} = \frac{3}{n}$$

$$c_i = a + i\Delta x = -1 + i\cdot\frac{3}{n} = -1 + \frac{3}{n}i$$

Al sustituir en la expresión para calcular la integral se obtiene

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{2}(x^3-2x)dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(-1+\frac{3}{n}i\right)\frac{3}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(-1+\frac{3}{n}i\right)^3-2\left(-1+\frac{3}{n}i\right)\right]\frac{3}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[-1+3\left(\frac{3}{n}i\right)-3\left(\frac{3}{n}i\right)^2+\left(\frac{3}{n}i\right)^3+2-2\left(\frac{3}{n}i\right)\right]\frac{3}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[-1+\frac{9}{n}i-\frac{27}{n^2}i^2+\frac{27}{n^3}i^3+2-\frac{6}{n}i\right]\frac{3}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{3}{n}+\frac{27}{n^2}i-\frac{81}{n^3}i^2+\frac{81}{n^4}i^3+\frac{6}{n}-\frac{18}{n^2}i\right) \\
& \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{3}{n}+\frac{9}{n^2}i-\frac{81}{n^3}i^2+\frac{81}{n^4}i^3\right)
\end{aligned}
$$

Ahora se utilizan las propiedades de las sumatorias

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{2}(x^3-2x)dx &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{3}{n}+\sum_{i=1}^{n}\frac{9}{n^2}i-\sum_{i=1}^{n}\frac{81}{n^3}i^2+\sum_{i=1}^{n}\frac{81}{n^4}i^3\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{3}{n}+\frac{9}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i-\frac{81}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2+\frac{81}{n^4}\sum_{i=1}^{n}i^3\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n}\cdot n+\frac{9}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}-\frac{81}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{81}{n^4}\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right)
\end{aligned}
$$

Solo hace falta simplificar la expresión en términos de n y calcular el límite

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{2}(x^3-2x)dx &= \lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{9}{2n}\cdot(n+1)-\frac{27}{2n^2}\cdot(2n^2+3n+1)+\frac{81}{4n^2}\cdot(n^2+2n+1)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{9}{2}+\frac{9}{2n}-27-\frac{81}{2n}-\frac{27}{2n^2}+\frac{81}{4}+\frac{81}{2n}+\frac{81}{4n^2}\right) \\
&= 3+\frac{9}{2}-27+\frac{81}{4} \\
&= \frac{3}{4}
\end{aligned}
$$