PROBLEMA RESUELTO 2

Encuentre volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar la región limitada por la curva $x = 2y - y^2 + 2$ y por la recta $x = -1$, alrededor de la recta $x = -1$. Utilice el método de discos o anillos.

Solución

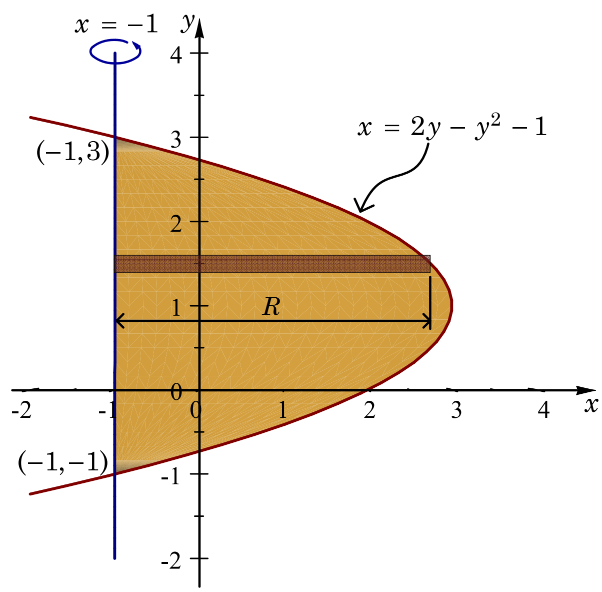
Encontrando los puntos de intersección entre la curva y el eje de rotación

$$
\begin{aligned}
-1 &= 2y - y^2 + 2 \\
y^2 - 2y - 3 &= 0 \\
(y-3)(y+1) &= 0 \\
y = 3, &\quad y = -1
\end{aligned}
$$

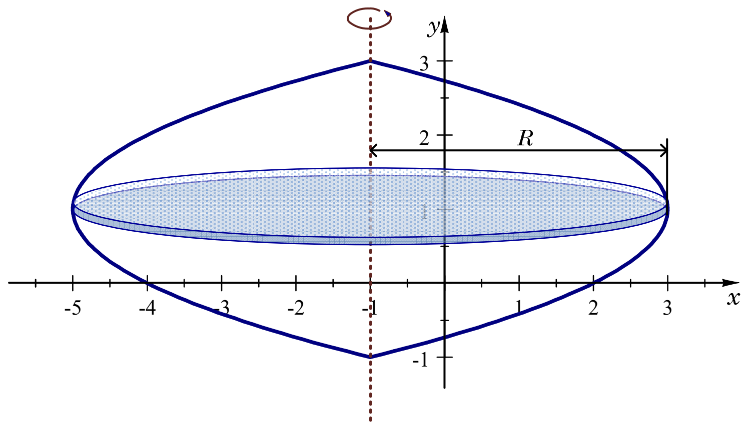
Entonces los puntos de intersección son

$$(-1,3) \text{ y } (-1,-1)$$

Ahora se dibuja la región del plano que se va a girar, el eje de rotación y un elemento diferencial de área perpendicular al eje de rotación. En la misma figura se indica el radio del disco que se genera al rotar la región alrededor de la recta $x = -1$



En la siguiente figura se muestra un dibujo aproximado del sólido de revolución, se dibuja también un elemento diferencial que tiene la forma de un disco



El volumen del sólido está dado por

$$V = \int_a^b \pi R^2 dy$$

Como se observa en la figura superior, el radio R es la diferencia entre dos funciones cuya variable independiente es y. La mayor es la parábola $x_1 = 2y - y^2 + 2$ y la menor es la recta vertical $x_2 = -1$, entonces

$$\begin{aligned} R &= x_1 - x_2 \\ &= (2y - y^2 + 2) - (-1) \\ &= 2y - y^2 + 3 \end{aligned}$$

Los límites te integración se obtienen de la región acotada por la parábola y la recta. Como la variable de integración es y los limites van de -1 a 3

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^{3} \pi(2y - y^2 + 3)^2 dy \\ &= \int_{-1}^{3} \pi(y^4 + 9 - 4y^3 + 12y - 2y^2) dy \\ &= \pi\left(\frac{y^5}{5} + 9y - y^4 + 6y^2 - \frac{2y^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{3} \\ &= \pi\left(\frac{(3)^5}{5} + 9(3) - (3)^4 + 6(3)^2 - \frac{2(3)^3}{3}\right) - \pi\left(\frac{(-1)^5}{5} + 9(-1) - (-1)^4 + 6(-1)^2 - \frac{2(-1)^3}{3}\right) \\ &= \pi\left(\frac{243}{5} + 27 - 81 + 54 - 18\right) - \pi\left(-\frac{1}{5} - 9 - 1 + 6 + \frac{2}{3}\right) \\ &= \pi\left(\frac{153}{5}\right) - \pi\left(-\frac{53}{15}\right) \\ &= \frac{512\pi}{15} \end{aligned}$$