PROBLEMA RESUELTO 2

Encuentre el área de la región limitada por las dos parábolas $y = x^2$, $y = 8 - x^2$ y la recta $y = 4x + 12$.

Solución

Primero encontramos los puntos de intersección, como en este problema son 3 ecuaciones se tomarán las curvas de dos en dos.

Igualando las dos parábolas

$$x^2 = 8 - x^2$$
$$2x^2 = 8$$
$$x^2 = 4$$
$$x = 2, x = -2$$

Los puntos de intersección entre las dos parábolas son $(-2,4)$ y $(2,4)$

Encontrando los puntos de intersección entre la parábola $y = x^2$ y la recta

$$x^2 = 4x + 12$$
$$x^2 - 4x - 12 = 0$$
$$(x+2)(x-6) = 0$$
$$x = -2, x = 6$$

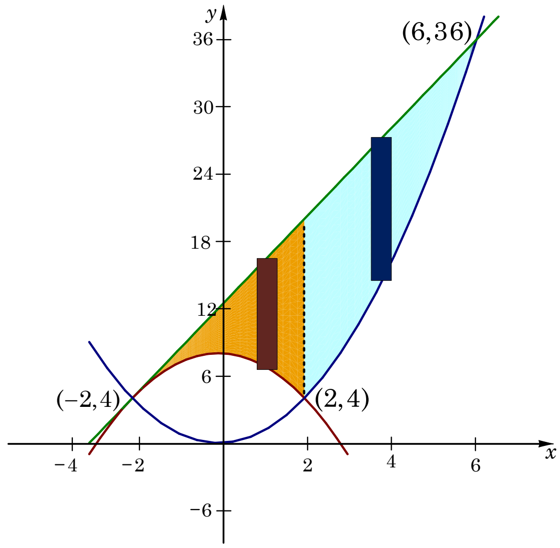
Por lo que los puntos de intersección son $(-2,4)$ y $(6,36)$

Finalmente, encontrando los puntos de intersección entre la recta y la parábola $y = 8 - x^2$

$$8 - x^2 = 4x + 12$$
$$x^2 + 4x + 4 = 0$$
$$(x+2)^2 = 0$$
$$x = -2$$

Por lo que se intersecan en el punto $(-2,4)$

La siguiente figura muestra la región acotada por las tres curvas.



Para calcular el área es necesario dividir la región en dos integrales. En la primera integral la función mayor es la recta y la función menor es la parábola $y = 8 - x^2$, que se muestra en color amarillo en la figura. La segunda integral la función mayor es la recta y la función menor es la parábola $y = x^2$, que se muestra en color celeste en la figura.

El área acotada por las tres curvas es

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-2}^{2}\Big[(4x+12)-(8-x^2)\Big]dx + \int_{2}^{6}\Big[(4x+12)-(x^2)\Big]dx \\
&= \int_{-2}^{2}\left(x^2+4x+4\right)dx + \int_{2}^{6}\left(4x+12-x^2\right)dx \\
&= \left(\frac{x^3}{3}+2x^2+4x\right)\Bigg|_{-2}^{2} + \left(2x^2+12x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{2}^{6} \\
&= \left[\left(\frac{8}{3}+8+8\right)-\left(\frac{-8}{3}+8-8\right)\right]+\left[(72+72-72)-\left(8+24-\frac{8}{3}\right)\right] \\
&= \left[\left(\frac{56}{3}\right)-\left(-\frac{8}{3}\right)\right]+\left[(72)-\left(\frac{88}{3}\right)\right] \\
&= \frac{64}{3}+\frac{128}{3} \\
&= 64
\end{aligned}$$