

PROBLEMA RESUELTO 1

Calcule la integral definida

$$\int_{-1}^2 x\sqrt{x+2} \, dx$$

Solución

Primero se calcula la integral indefinida

$$\int x\sqrt{x+2} \, dx$$

Haciendo la sustitución adecuada

$$u = x + 2$$

$$du = dx$$

$$x = u - 2$$

La Integral indefinida en términos de u queda como

$$\int x\sqrt{x+2} \, dx = \int (u-2)\sqrt{u} \, du$$

Desarrollando productos y calculando la integral indefinida

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{x+2} \, dx &= \int (u^{3/2} - 2u^{1/2}) \, du \\ &= \frac{u^{5/2}}{\frac{5}{2}} - \frac{2u^{3/2}}{\frac{3}{2}} + c \\ &= \frac{2u^{5/2}}{5} - \frac{4u^{3/2}}{3} + c \end{aligned}$$

La integral indefinida en términos de x es

$$\int x\sqrt{x+2} \, dx = \frac{2(x+2)^{5/2}}{5} - \frac{4(x+2)^{3/2}}{3} + c$$

Una vez calculada la integral indefinida, se utiliza el teorema fundamental del calculo para evaluar la integral definida

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 x\sqrt{x+2} \, dx &= \left[\frac{2(x+2)^{5/2}}{5} - \frac{4(x+2)^{3/2}}{3} \right]_{-1}^2 \\ &= \left[\frac{2(2+2)^{5/2}}{5} - \frac{4(2+2)^{3/2}}{3} \right] - \left[\frac{2(-1+2)^{5/2}}{5} - \frac{4(-1+2)^{3/2}}{3} \right] \\ &= \left[\frac{2(32)}{5} - \frac{4(8)}{3} \right] - \left[\frac{2(1)}{5} - \frac{4(1)}{3} \right] = \left(\frac{32}{5} \right) - \left(-\frac{14}{15} \right) \\ &= \frac{46}{15} \end{aligned}$$

Otra alternativa para calcular una integral definida cuando se hace una sustitución, consiste en cambiar los límites de integración al hacer el cambio de variable

$$\int_{-1}^2 x\sqrt{x+2} dx$$

Al hacer la sustitución

$$u = x + 2$$

$$du = dx$$

$$x = u - 2$$

Cambiando los límites de integración

Cuando $x = -1$ se tiene que $u = x + 2 = -1 + 2 = 1$

Cuando $x = 2$ se tiene que $u = x + 2 = 2 + 2 = 4$

Ahora la integral definida queda expresada como

$$\int_{-1}^2 x\sqrt{x+2} dx = \int_1^4 (u-2)u^{1/2} du$$

Se calcula la integral y se evalúa para u

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 x\sqrt{x+2} dx &= \int_1^4 (u-2)u^{1/2} du \\&= \left[\frac{2u^{5/2}}{5} - \frac{4u^{3/2}}{3} \right]_1^4 \\&= \left[\frac{2(4)^{5/2}}{5} - \frac{4(4)^{3/2}}{3} \right] - \left[\frac{2(1)^{5/2}}{5} - \frac{4(1)^{3/2}}{3} \right] \\&= \left[\frac{2(32)}{5} - \frac{4(8)}{3} \right] - \left[\frac{2(1)}{5} - \frac{4(1)}{3} \right] \\&= \left(\frac{32}{5} \right) - \left(-\frac{14}{15} \right) \\&= \frac{46}{15}\end{aligned}$$
