

PROBLEMA RESUELTO 1

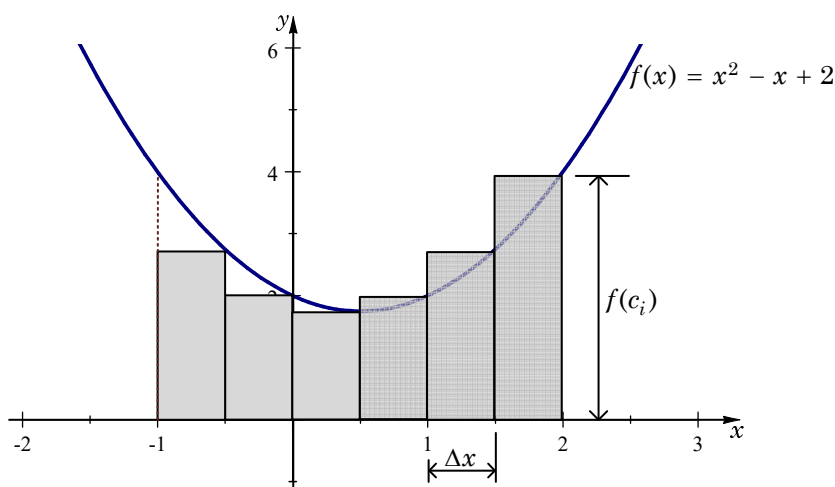
Dada la función

$$f(x) = x^2 - x + 2$$

- Aproxime el área bajo la curva en el intervalo $[-1, 2]$, utilizando sumas de Riemann con $n = 6$ y el extremo derecho.
- Aproxime el área bajo la curva en el intervalo $[-1, 2]$, utilizando sumas de Riemann con $n = 6$ y el extremo izquierdo.
- Utilice el límite de una suma de Riemann para calcular el valor exacto del área bajo la curva en el intervalo $[-1, 2]$

Solución

- La figura muestra la gráfica de la función, así como los 6 rectángulos, cada uno de ellos con altura en el extremo derecho de la función.



La suma de Riemann establece que

$$A \approx \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x$$

Para $n = 6$ la suma queda expresada como

$$\begin{aligned} A &\approx \sum_{i=1}^6 f(c_i) \Delta x = f(c_1) \Delta x + f(c_2) \Delta x + f(c_3) \Delta x + f(c_4) \Delta x + f(c_5) \Delta x + f(c_6) \Delta x \\ &= \Delta x (f(c_1) + f(c_2) + f(c_3) + f(c_4) + f(c_5) + f(c_6)) \end{aligned}$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-(-1)}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

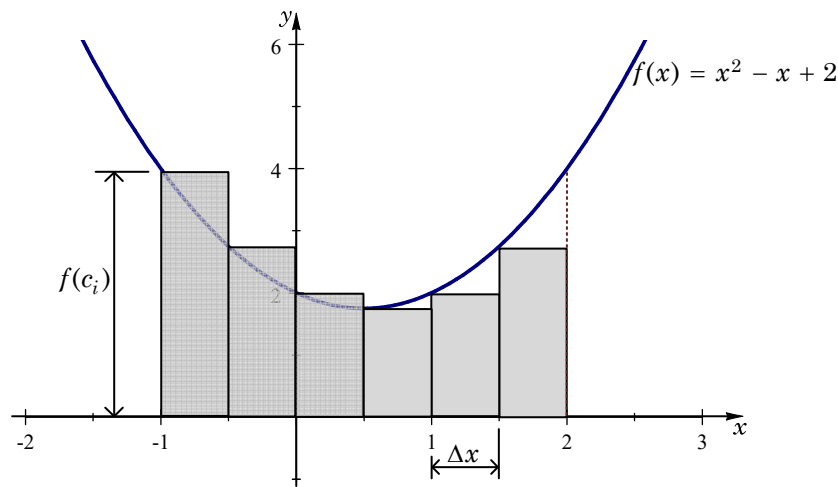
Cuando se utiliza el extremo derecho de cada rectángulo para calcular la altura, se tiene

$$c_i = a + i\Delta x = -1 + i \cdot \frac{1}{2} = -1 + \frac{i}{2}$$

Al sustituir Δx , c_i y realizar los cálculos resultantes, se obtiene el valor aproximado del área bajo la curva usando extremo derecho con $n = 6$

$$\begin{aligned} A &\approx \sum_{i=1}^6 f(c_i)\Delta x = \Delta x(f(c_1) + f(c_2) + f(c_3) + f(c_4) + f(c_5) + f(c_6)) \\ &\approx \frac{1}{2} \left[f\left(-1 + \frac{1}{2}\right) + f\left(-1 + \frac{2}{2}\right) + f\left(-1 + \frac{3}{2}\right) + f\left(-1 + \frac{4}{2}\right) + f\left(-1 + \frac{5}{2}\right) + f\left(-1 + \frac{6}{2}\right) \right] \\ &\approx \frac{1}{2} \left[f\left(-\frac{1}{2}\right) + f(0) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) + f\left(\frac{3}{2}\right) + f(2) \right] \\ &\approx \frac{1}{2} \left(\frac{11}{4} + 2 + \frac{7}{4} + 2 + \frac{11}{4} + 4 \right) \\ &\approx \frac{1}{2} \left(\frac{61}{4} \right) \\ &\approx \frac{61}{8} \end{aligned}$$

- b. Al utilizar el extremo izquierdo, la diferencia es que la altura de cada rectángulo se calcula utilizando el lado izquierdo del mismo, como se muestra en la figura siguiente



$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-(-1)}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

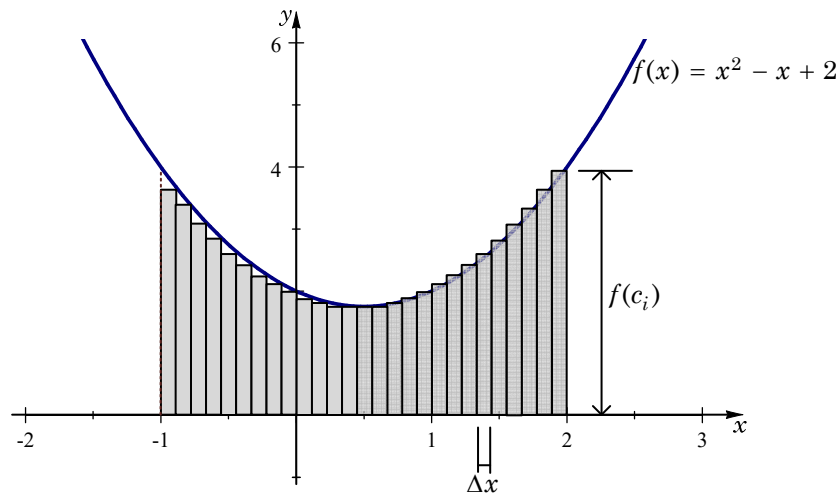
$$c_i = a + (i-1)\Delta x = -1 + (i-1) \cdot \frac{1}{2}$$

Al sustituir Δx , c_i y realizar los cálculos resultantes, se obtiene el valor aproximado del área bajo la curva usando extremo izquierdo con $n = 6$

$$\begin{aligned} A &\approx \sum_{i=1}^6 f(c_i)\Delta x = \Delta x(f(c_1) + f(c_2) + f(c_3) + f(c_4) + f(c_5) + f(c_6)) \\ &\approx \frac{1}{2} \left[f(-1) + f\left(-1 + \frac{1}{2}\right) + f\left(-1 + \frac{2}{2}\right) + f\left(-1 + \frac{3}{2}\right) + f\left(-1 + \frac{4}{2}\right) + f\left(-1 + \frac{5}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A &\approx \frac{1}{2} \left[f(-1) + f\left(-\frac{1}{2}\right) + f(0) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) + f\left(\frac{3}{2}\right) \right] \\
&\approx \frac{1}{2} \left(4 + \frac{11}{4} + 2 + \frac{7}{4} + 2 + \frac{11}{4} \right) \\
&\approx \frac{1}{2} \left(\frac{61}{4} \right) \\
&\approx \frac{61}{8}
\end{aligned}$$

- c. Para calcular el valor exacto del área bajo la curva, utilizando límites y sumas de Riemann se recomienda utilizar extremo derecho para que los cálculos sean más simples. La figura siguiente muestra como el área se aproxima al área real al aumentar el número de rectángulos



En este caso el área exacta e

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x$$

Donde

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-(-1)}{n} = \frac{3}{n}$$

$$c_i = a + i\Delta x = -1 + i \cdot \frac{3}{n} = -1 + \frac{3}{n}i$$

Al sustituir en la expresión para el área se obtiene

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left(-1 + \frac{3}{n}i\right) \frac{3}{n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left[\left(-1 + \frac{3}{n}i\right)^2 - \left(-1 + \frac{3}{n}i\right) + 2 \right] \frac{3}{n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left[1 - \frac{6}{n}i + \frac{9}{n^2}i^2 + 1 - \frac{3}{n}i + 2 \right] \frac{3}{n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left[4 - \frac{9}{n}i + \frac{9}{n^2}i^2 \right] \frac{3}{n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{12}{n} - \frac{27}{n^2}i + \frac{27}{n^3}i^2 \right)
 \end{aligned}$$

Ahora se utilizan las propiedades de las sumatorias

$$\begin{aligned}
 A &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n \frac{12}{n} - \sum_{i=1}^n \frac{27}{n^2}i + \sum_{i=1}^n \frac{27}{n^3}i^2 \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n \frac{12}{n} - \frac{27}{n^2} \sum_{i=1}^n i + \frac{27}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{12}{n} \cdot n - \frac{27}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{27}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right)
 \end{aligned}$$

Solo hace falta simplificar la expresión en términos de n y calcular el límite

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(12 - \frac{27(n+1)}{2n} + \frac{9(2n^2+3n+1)}{2n^2} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(12 - \frac{27}{2} - \frac{27}{2n} + 9 + \frac{27}{2n} + \frac{9}{2n^2} \right) \\
 &= 12 - \frac{27}{2} - 0 + 9 + 0 + 0 \\
 &= \frac{15}{2}
 \end{aligned}$$
