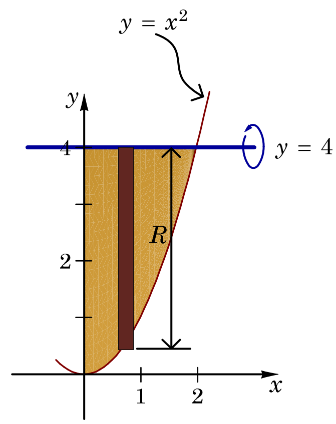
PROBLEMA RESUELTO 1

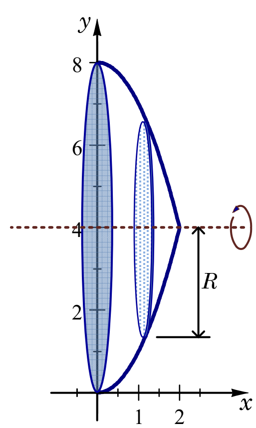
Encuentre volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar alrededor de la recta $y = 4$, la región limitada por la parábola $y = x^2$, la recta $y = 4$ y el eje y. Utilice el método de discos o anillos.

Solución

Primero se dibuja la región del plano que se va a girar, el eje de rotación y un elemento diferencial de área perpendicular al eje de rotación. En la misma figura se indica el radio del disco que se genera al rotar la región alrededor de la recta $y = 4$



En la siguiente figura se muestra un dibujo aproximado del sólido de revolución, se dibuja también un elemento diferencial que tiene la forma de un disco



El volumen del sólido está dado por

$$V = \int_a^b \pi R^2 dx$$

Como se observa en la figura superior, el radio R es la diferencia entre dos funciones, la mayor es la recta $y_1 = 4$ y la menor es la parábola $y_2 = x^2$, entonces

$$R = y_2 - y_1 = 4 - x^2$$

Los límites te integración se obtienen de la región que está rotando. Como la variable de integración es x los limites van de 0 a 2

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^2 \pi(4 - x^2)^2 dx \\
&= \int_0^2 \pi(16 - 8x^2 + x^4) dx \\
&= \pi\left(16x - \frac{8x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^2 \\
&= \pi\left(16(2) - \frac{8(2)^3}{3} + \frac{(2)^5}{5}\right) - \pi(0) \\
&= \left(32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5}\right)\pi \\
&= \frac{256}{15}\pi
\end{aligned}
$$