PROBLEMA RESUELTO 1

Encuentre el área de la región limitada por la curva $y = x^2 + 3x$ y la recta $x + y - 5 = 0$

Solución

Primero encontramos los puntos de intersección, para ello igualamos las ecuaciones y despejamos x

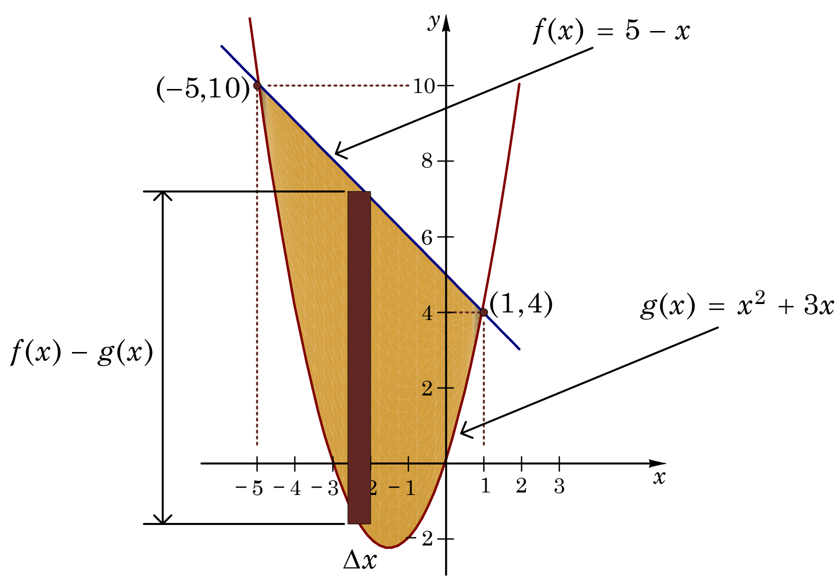
$$x^2 + 3x = 5 - x$$

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$(x + 5)(x - 1) = 0$$

$$x = -5, \quad x = 1$$

Al evaluar $x = -5$ y $x = 1$ en la parábola o en la recta se obtiene que los puntos de intersección son $(-5,10)$ y $(1,4)$. La siguiente figura muestra el área que se quiere calcular, así como un elemento diferencial de área



Como la recta está arriba de la parábola entre -5 y 1, se toma como $f(x) = 5 - x$ y como $g(x) = x^2 + 3x$

El área entre las dos curvas está dada por

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

$$= \int_{-5}^{1} \left[(5 - x) - (x^2 + 3x)\right]dx = \int_{-5}^{1} (5 - 4x - x^2)dx$$

$$= \left[5x - 2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_{-5}^{1} = \left(5 - 2 - \frac{1}{3}\right) - \left(-25 - 50 + \frac{125}{3}\right) = \left(\frac{8}{3}\right) - \left(-\frac{100}{3}\right)$$

$$= \frac{108}{3}$$

$$= 36$$