Ejercicios sobre problemas de optimización

1. Encuentre el punto sobre la recta $y = -\frac{1}{4}x + 8$ de manera que la distancia del punto al origen del sistema de coordenadas sea mínima.
2. Determine en qué puntos de la curva $y = 1 + 40x^3 - 3x^5$, donde la recta tangente tiene la máxima pendiente.
3. Encontrar el punto más cercano al origen sobre la recta $y = x + 7$
4. ¿En qué puntos de la curva $y = 1 + 40x^3 - 3x^5$, tiene la recta tangente pendiente más grande?
5. Encuentre el punto sobre la hipérbola $xy = 8$ que está más cercano al punto $(3,0)$
6. Encuentre la distancia mínima del punto (3,0) a la gráfica de la función $y = \frac{8}{x}$
7. Encuentre la distancia vertical máxima entre las gráficas de las funciones:

$$y = Lnx \qquad\qquad y = (x-1)^2$$

8. Determine las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en la región del primer cuadrante limitada por los ejes x e y, y la gráfica de $y = \sqrt{4-x}$.
9. Escriba la ecuación de la recta que pasa por el punto (3,4) y forma con los ejes coordenados en el primer cuadrante un triángulo de área mínima.
10. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = 1 - x^2$, de tal forma que el área del triángulo rectángulo en el primer cuadrante formado por la recta y los ejes de coordenadas tenga área mínima.
11. Encuentre las coordenadas del punto sobre el eje positivo de las x, de tal manera que la suma de las distancias de este punto a los puntos $A(0,1)$ y $B(4,1)$ sea mínima.
12. Un granjero tiene 4000 pies de material para cercar un terreno. Determine las dimensiones del terreno rectangular de área máxima que puede cercar con todo el material.
13. Un granjero tiene 4000 pies de material para cercar un terreno que se encuentra al de un río recto. De tal forma que solo colocará el cerco en los tres lados restantes. Determine las dimensiones del terreno rectangular de área máxima que puede cercar con todo el material.
14. Un granjero tiene 4000 pies de material para cerca. Con ese material debe cercar tres corrales iguales, uno junto al otro. Determine las dimensiones de cada corral de tal manera que su área sea máxima.
15. Un granjero quiere construir un corral rectangular de 1000 metros cuadrados de área. El terreno se encuentra al lado de un barranco, de tal forma que la cerca en ese lado cuesta Q120 por metro lineal y el material de cercado en los otros tres lados cuesta Q80.00 por metro lineal. Determine las dimensiones del rectángulo de tal manera que el costo total del cerco sea mínimo.

16. Un trozo de alambre de 100 centímetros de longitud será cortado en dos partes. Con la primera parte se construirá un cuadrado y con la segunda parte un círculo. En donde debe hacerse el corte de tal manera que la suma de las áreas de las dos figuras sea a) máxima b) mínima.

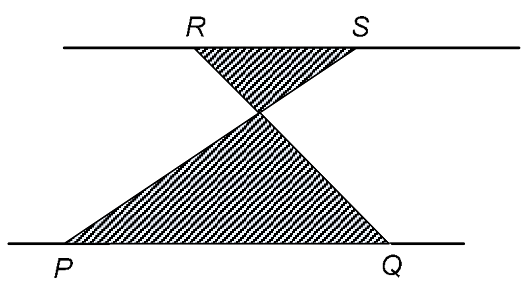
17. Un trozo de alambre de 100 centímetros de longitud será cortado en dos partes. Con la primera parte se construirá un cuadrado y con la segunda parte un triángulo equilátero. En donde debe hacerse el corte de tal manera que la suma de las áreas de las dos figuras sea a) máxima b) mínima.

18. Un trozo de alambre de 100 centímetros de longitud será cortado en dos partes. Con la primera parte se construirá un triángulo equilátero y con la segunda parte un círculo. En donde debe hacerse el corte de tal manera que la suma de las áreas de las dos figuras sea a) máxima b) mínima.

19. Se va a construir un cartel rectangular en una cartulina con un área impresa de 600 pulgadas cuadradas. Si el cartel debe tener márgenes de 2 pulgadas en los cuatro lados. Determine las dimensiones de la cartulina de tal manera que su área total sea mínima.

20. Se diseña una ventana en forma de un rectángulo con un triángulo equilátero arriba de este. Encuentre las dimensiones de la ventana con mayor área si su perímetro mide 10 metros.

21. La figura muestra dos rectas paralelas separadas una distancia de 6 centímetros y dos rectas transversales PS y QR que forman dos triángulos. Si los puntos P y Q están separados por una distancia de 10 centímetros, encuentre la distancia entre los puntos R y S, de tal forma que la suma de las áreas de los dos triángulos sea mínima.



22. Una pista de atletismo consta de dos rectas paralelas y dos partes semicirculares. La longitud total de la pista debe tener 400 metros. Encuentre las dimensiones de la pista de tal forma que:

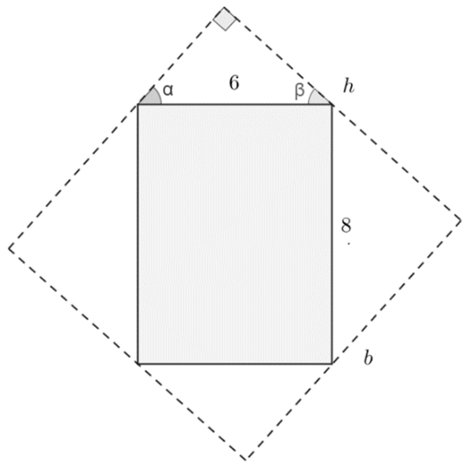
a. El área total del terreno encerrado sea mínima.

b. El área del terreno rectangular sea máxima.

23. Se va a construir un canal para riego con sección en forma de un trapecio isósceles de 12 pulgadas de base y lados iguales de 12 pulgadas. Determine la altura del trapecio de tal forma que el área sea máxima.

24. Encuentre el área máxima de un triángulo rectángulo cuando su perímetro es de 1 pie.

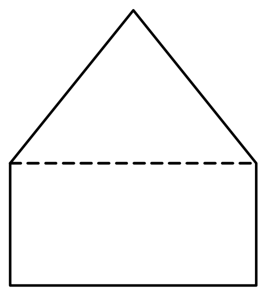
25. Halle las dimensiones del rectángulo de área máxima circunscrito a otro rectángulo de altura 8 pies y base de 6 pies, como se muestra



26. Una ventana tiene la forma de un rectángulo coronado por un triángulo equilátero. Si el perímetro de la ventana debe ser de 16 pies.

a. Encuentre las dimensiones de la ventana para la cual el área de la misma es máxima.

b. Encuentre las dimensiones de la ventana para la cual el área de la misma es mínima.



27. Obtenga las dimensiones del cono de volumen máximo que puede inscribirse dentro de una esfera de 5 pies de radio.

28. Determine el radio y altura del cilindro de mayor volumen que se puede inscribir en una semiesfera de radio R.

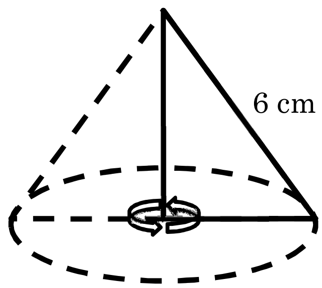
29. Determine las dimensiones del cilindro circular recto de mayor volumen inscrito dentro de una semiesfera de radio 10, si la base del cilindro descansa sobre la parte plana de la semiesfera.

30. Encontrar las dimensiones del cilindro circular recto de volumen máximo que pueda ser inscrito en un cono circular recto con un radio de 5 cm y una altura de 12 cm.

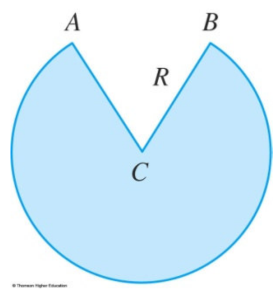
31. Los Navajos en Arizona hacen sus casas en forma de cono circular invertido. Un habitante decide que puede guardar su maíz cosechado, en un recipiente cilíndrico bajo un techo como una de estas casas. Matemáticamente su problema se reduce a: Calcular las dimensiones del cilindro de mayor volumen que se puede inscribir en un cono circular recto de 4 m de altura y de 2 m de radio.

32. Obtenga las dimensiones del cono circular recto de volumen máximo que se puede inscribir en una esfera de 10 centímetros de radio.

33. Suponga que un triángulo rectángulo tiene hipotenusa de longitud 6 cm y uno de sus catetos está en posición horizontal. Se hace girar al triángulo tomando como eje de rotación el cateto vertical; la figura sólida que se forma es un cono circular recto (ver figura). Determine las dimensiones de los catetos que generan el cono de mayor volumen.



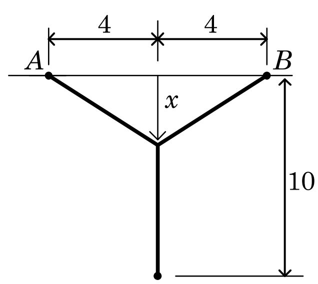
34. Se va a construir un cono para beber a partir de un trozo circular de papel de radio 8 cm al recortar un sector circular y unir los bordes CA y CB. Encuentre la capacidad máxima del cono.



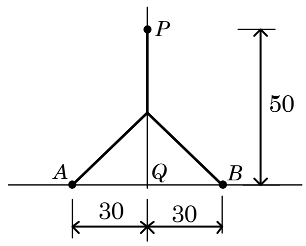
35. La figura muestra un cable colgante en forma de Y. La distancia entre los puntos de sujeción A y B es una constante 8 pies.

a. Exprese la longitud total del cable en términos de la variable x.

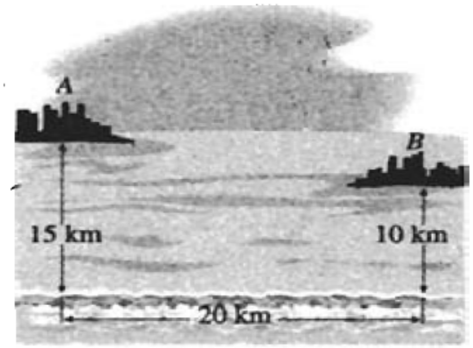
b. Determine x de tal forma que la longitud total del cable sea mínima. Calcule la longitud mínima.



36. Dos fábricas A y B se localizan a 60 km de distancia una de la otra sobre una carretera recta. Ambas fabricas recibirán el suministro eléctrico desde una planta localizada en el punto P a 50 kilómetros al norte del punto medio Q entre ambas fábricas, como se muestra en la figura. Determine la longitud mínima del cableado eléctrico necesario para suministrar energía a ambas fábricas.



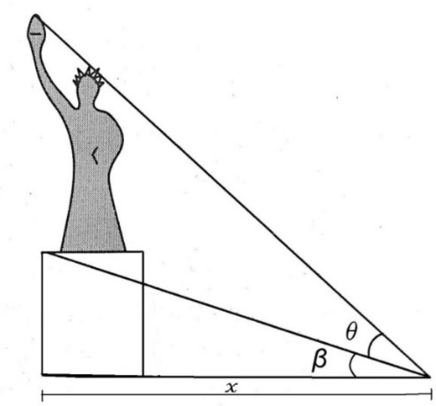
37. Dos ciudades A y B obtendrán su abastecimiento de agua de la misma estación de bombeo, la cual se ubicará en la orilla de un río recto a 15 km de la ciudad A y a 10 km de la ciudad B. Los puntos del río más cercanos de A y B están separados 20 km y A y B se encuentran en el mismo lado del río. Estime dónde debe ubicarse la estación de bombeo de modo que se emplee la menor cantidad de tubería.



38. Una refinería de petróleo se encuentra en la orilla norte de un río recto que tiene 200 metros de ancho. Se debe construir una tubería desde la refinería a los tanques de almacenamiento situados en la orilla sur, 600 metros al este de la refinería. El costo de colocación de la tubería es de $400 por km sobre la tierra desde la refinería hasta un punto P sobre la orilla norte y de $800 bajo el rio desde el punto P hasta los tanques de almacenamiento. Determine donde debe ubicarse el punto P de manera que el costo total de la tubería sea mínimo.

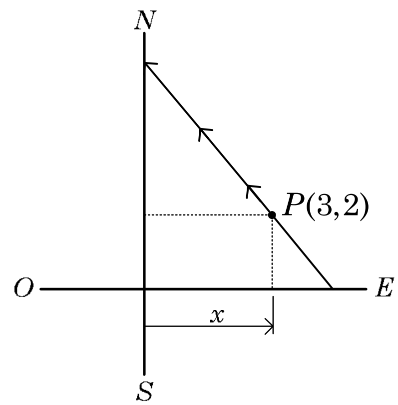
39. A 12 millas mar adentro, se conectará un equipo de perforación a una refinería en tierra, que se localiza a 20 millas del equipo sobre la costa. La tubería submarina cuesta Q50,000 por milla y la tubería terrestre cuesta Q30,000 por milla. ¿Qué valores de x y de y abaratarán más la conexión?

40. Para tener la mejor vista de la estatua de la libertad una persona debe estar en la posición en donde θ sea máximo. Si la estatua tiene una altura de 92 metros, incluyendo el pedestal, que mide 46 metros de alto, ¿a qué distancia x de la base debe estar el observador?



41. Un barco sale del punto A navegando hacia el sur con una velocidad de 10 millas por hora. En ese mismo momento, obro barco que navega hacia el oeste con una velocidad de 15 millas por hora pasa por un punto que se encuentra a 30 millas al este del punto A, ¿en qué momento la distancia entre los dos barcos es mínima?

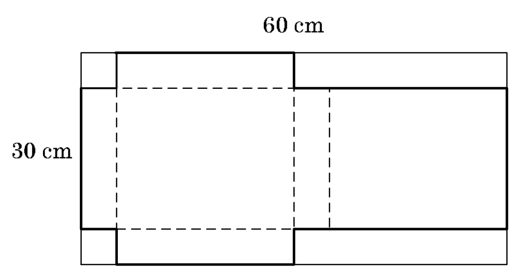
42. Un piloto busca recorrer la menor distancia viajando en línea recta desde un punto de la carretera Este-Oeste hacia un punto sobre la carretera Norte-Sur pasando por un punto P justo a la orilla de un pueblo. Determine la distancia x en el intervalo $[3.5, 10]$ de manera que la distancia recorrida por el piloto sea mínima.



43. Dos aviones A y B vuelan horizontalmente a una misma altura de modo que la posición de B está al suroeste de A, 20 km al oeste y 20 km al sur de A. El avión A vuela hacia el oeste a 16 km/min y el avión B vuela hacia el norte a 20 km/min. Determine el tiempo transcurrido para que los aviones se encuentren uno del otro a una distancia mínima.

44. Un tanque para gas propano, que tiene forma de dos hemisferios soldados a los extremos de un cilindro circular recto, debe tener capacidad de almacenar 10π metros cúbicos de gas. Si el material para los hemisferios cuesta Q 2,000 por metro cuadrado y el material de la pared lateral del cilindro cuesta Q 1,000 por metro cuadrado, encuentre las dimensiones del tanque que harán que tenga un costo de material mínimo.

45. Encuentre el volumen máximo de la caja rectangular cerrada, construida al cortar dos cuadrados y dos rectángulos en las esquinas de una placa rectangular de 30 cm de altura y 60 cm de longitud, con dobleces en las líneas punteadas como se muestra en la figura.



46. Se va a construir un tanque metálico de almacenamiento con volumen de 3 m cúbicos, con forma de un cilindro circular, en posición vertical, con un hemisferio en su parte superior. Calcular las dimensiones que emplearán la cantidad mínima de metal.

47. Para construir un envase cerrado en forma de cilindro circular recto que tenga un volumen de 27 pulgadas cúbicas, la tapa y la base se cortarán de trozos cuadrados de hojalata. Estime el radio del envase si se emplea la cantidad mínima de hojalata en su construcción, Incluya la hojalata que se desperdicia al obtener la tapa y la base y después determine la altura que debe tener el envase.

48. Un depósito tendrá la forma de un cilindro circular recto con dos semiesferas colocadas en los extremos del cilindro. Si el depósito será utilizado para almacenar 120 metros cúbicos de combustible. Encontrar las dimensiones del depósito de tal forma que el material empleado en su construcción sea el mínimo.

49. Se dispone de 1,200 centímetros cuadrados de lámina para construir una caja con base cuadrada y la parte superior abierta. Encuentre el volumen máximo posible de la caja.

50. Una caja con base cuadrada y parte superior abierta debe tener un volumen de 32,000 centímetros cúbicos. Encuentre las dimensiones de la caja que minimice la cantidad de material utilizado en su construcción.

51. Una empresa se dedica a la fabricación de latas cerradas de aluminio, con forma de cilindro circular recto. Si uno de los modelos que fabrica debe tener un volumen de 16π pulgadas cúbicas, determine la altura y el radio de la lata, para utilizar la cantidad mínima de material en su fabricación.

52. Un fabricante desea envasar 1 galón (3,400 centímetros cúbicos), en una lata cilíndrica con base y tapadera. Calcule las dimensiones de la lata de tal modo que el material usado en su fabricación sea un mínimo. Use un criterio para asegurarse que efectivamente es un mínimo.

53. Una caja con base cuadrada y parte superior abierta debe tener un volumen de 32,000 centímetros cúbicos. Encuentre las dimensiones de la caja que minimice la cantidad de material utilizado en su construcción.

54. Se va a construir un depósito para almacenar granos abierto en la parte superior, con una capacidad de 100 pies cúbicos. El depósito esta formado por un cono circular recto invertido de 5 pies de radio y con un cilindro circular recto colocado encima de la parte superior del cono. Determine la altura del cono de tal manera que la superficie total del depósito sea mínima.

55. Un estudiante vende collares en el campus a fin de agenciarse de fondos. Ha estado vendiendo 140 unidades semanales a un precio de Q. 10.00; una encuesta a sus clientes le ha permitido determinar que, por cada quetzal que disminuya el precio, aumentaría sus ventas en 14 unidades semanales. Si, por cada collar, gasta Q 5.00 en materiales determine el precio que le otorgaría la ganancia máxima.

56. Una agencia de excursiones puede transportar a 150 personas a un costo de Q100 por persona. La empresa ofrece un descuento de Q0.50 por cada persona adicional a las 150. Determine el número de personas que debe asistir a la excursión de tal forma que el ingreso de la agencia sea máximo.

57. Los naranjos sembrados en una finca producen 600 naranjas por árbol si no se siembran mas de 20 árboles por cuerda. Por cada árbol adicional que se siembre, la producción disminuye en 15 naranjas por árbol. Determine el número de árboles que se deben sembrar por cuerda, de tal manera que el número de naranjas cosechadas sea máximo.