PROBLEMA RESUELTO 8

Calcule la integral indefinida

$$\int \frac{x+3}{x^2+2x+5}dx$$

Solución

En este problema se tiene la integral de una función racional. Las integrales de funciones racionales se estudian en detalle en el curso Intermedia 1, pero algunos problemas se pueden calcular con las fórmulas estudiadas en este curso.

Observe que al hacer la sustitución

$$u = x^2 + 2x + 5$$

El diferencial du es

$$du = (2x+2)dx$$

Como el diferencial du no coincide con el numerador de la fracción en la integral, hay que hacer algunos ajustes algebraicos para que coincidan

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+3}{x^2+2x+5}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2(x+3)}{x^2+2x+5}dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2x+6}{x^2+2x+5}dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2+4}{x^2+2x+5}dx \\
&= \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}dx}_{1} + \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{4}{x^2+2x+5}dx}_{2}
\end{aligned}$$

La sustitución propuesta funciona perfectamente para la integral 1,

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}dx &= \int \frac{du}{u} \\
&= \ln|u| \\
&= \ln\left|x^2+2x+5\right|
\end{aligned}$$

La integral 2 se calcula completando cuadrados en el denominador y haciendo una sustitución adecuada para obtener una función cuya integral es una tangente inversa

$$\begin{aligned}
\int \frac{4}{x^2+2x+5}dx &= \int \frac{4}{x^2+2x+1+4}dx \\
&= \int \frac{4}{(x+1)^2+4}dx
\end{aligned}$$

Ahora se puede hacer la sustitución

$$u = x + 1$$

$$du = dx$$

Obteniéndose

$$\int \frac{4}{x^2 + 2x + 5} dx = 4\int \frac{1}{u^2 + (2)^2} dx$$

$$= 4 \cdot \frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{u}{2}\right)$$

$$= 2\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

Al reemplazar los resultados de las integrales 1 y 2 en el problema inicial se tiene

$$\int \frac{x+3}{x^2 + 2x + 5} dx = \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{2x+2}{x^2 + 2x + 5} dx}_{1} + \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{4}{x^2 + 2x + 5} dx}_{2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2 + 2x + 5\right| + \frac{1}{2} \cdot 2\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + c$$

$$\int \frac{x+3}{x^2 + 2x + 5} dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2 + 2x + 5\right| + \tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + c$$