PROBLEMA RESUELTO 7

Calcule la integral indefinida

$$\int \frac{2x^3 + x^2 - x - 3}{2x - 1}\,dx$$

Solución

En este problema se tiene la integral de una función racional. Las integrales de funciones racionales se estudian en detalle en el curso Intermedia 1; pero algunos casos sencillos se pueden calcular con las fórmulas estudiadas en este curso. Cuando el grado del numerador es mayor o igual que el grado del denominador, hay que efectuar la división de polinomios. Después de efectuar la división, la fracción puede expresarse como

$$\frac{2x^3 + x^2 - x - 3}{2x - 1} = x^2 + x - \frac{3}{2x - 1}$$

Al calcular la integral se tiene

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x^3 + x^2 - x - 3}{2x - 1}\,dx &= \int \left(x^2 + x - \frac{3}{2x - 1} \right) dx \\
&= \int x^2\,dx + \int x\,dx - \int \frac{3}{2x - 1}\,dx \\
&= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \int \frac{3}{2x - 1}\,dx
\end{aligned}$$

La última integral se puede calcular haciendo la sustitución

$$\begin{aligned}
u &= 2x - 1 \\
du &= 2dx \\
\frac{1}{2}du &= dx
\end{aligned}$$

Obteniéndose que

$$\begin{aligned}
\int \frac{3}{2x - 1}\,dx &= \int \frac{3}{u} \cdot \frac{du}{2} \\
&= \frac{3}{2} \int \frac{du}{u} \\
&= \frac{3}{2} \ln|u| + c \\
&= \frac{3}{2} \ln|2x - 1| + c
\end{aligned}$$

Finálmente la respuesta al problema propuesto es

$$\int \frac{2x^3 + x^2 - x - 3}{2x - 1}\,dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2} \ln|2x - 1| + c$$