PROBLEMA RESUELTO 6

Utilice la regla de L'Hopital para determinar el límite

$$\lim_{x\to 0}\left(1+5\operatorname{sen}x\right)^{\cot x}$$

Solución

Al evaluar el límite se obtiene

$$\lim_{x\to 0}\left(1+5\operatorname{sen}x\right)^{\cot x}=\left(1+5\operatorname{sen}0\right)^{\cot 0}=1^{\infty}$$

Que es una forma indeterminada exponencial. Para calcular límites con formas indeterminadas exponenciales se recomienda aplicar logaritmos naturales a ambos lados de la función para transformar la forma exponencial en un producto, como se muestra a continuación

Primero hacemos

$$y=\left(1+5\operatorname{sen}x\right)^{\cot x}$$

Aplicando logaritmos naturales a ambos lados

$$y=\left(1+5\operatorname{sen}x\right)^{\cot x}$$

$$\ln y=\ln\left[\left(1+5\operatorname{sen}x\right)^{\cot x}\right]$$

$$\ln y=\cot x\cdot\ln(1+5\operatorname{sen}x)$$

Calculando el límite en la expresión anterior

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\left[\cot x\cdot\ln(1+5\operatorname{sen}x)\right]$$

El límite de la derecha tiene forma indeterminada $0\cdot\infty$ y se puede expresar como un cociente indeterminado

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+5\operatorname{sen}x)}{\tan x}$$

El límite de la derecha tiene forma indeterminada $\frac{0}{0}$ y se puede calcular utilizando la regla de L'Hopital

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{D_x\left(\ln(1+5\operatorname{sen}x)\right)}{D_x\left(\tan x\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+5\operatorname{sen}x}\cdot 5\cos x}{\sec^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{5\cos x}{1+5\operatorname{sen}x}}{\frac{1}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cos^3 x}{1+5\operatorname{sen}x}$$

$$=\frac{5(1)}{1+0}=5$$

Finalmente, para obtener el límite se utiliza la propiedad de los límites para una función compuesta y se aplica la función exponencial a ambos lados, como se muestra a continuación

$$\lim_{x \to 0} \ln y = 5$$

$$\ln\left(\lim_{x \to 0} y\right) = 5$$

$$\lim_{x \to 0} y = e^5$$

Por lo que la respuesta es

$$\lim_{x \to 0} \left(1 + 5\operatorname{sen} x\right)^{\cot x} = e^5$$