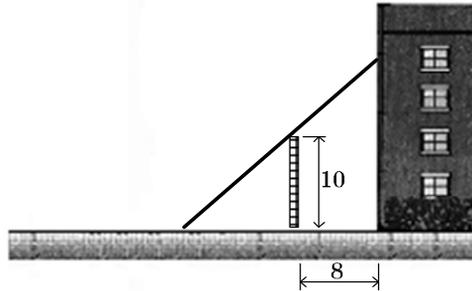


## PROBLEMA RESUELTO 6

Un edificio debe apuntalarse con una viga que ha de pasar sobre un muro paralelo de 10 pies de altura y a 8 pies de distancia del edificio, como se muestra en la figura. Hallar la mínima longitud posible de esa viga.



### Solución

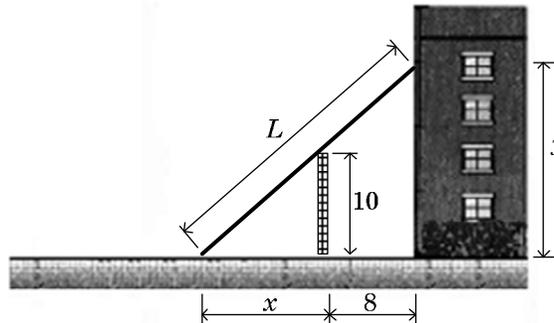
Se definen las siguientes variables

$L$  = longitud de la viga

$x$  = distancia del pie de la viga al muro paralelo

$y$  = altura del apoyo de la viga en el edificio

En la siguiente figura se ilustran cada una de las variables que se han definido anteriormente



Utilizando el teorema de Pitágoras, la longitud de la viga puede expresarse como

$$L = \sqrt{(x + 8)^2 + y^2}$$

Por semejanza de triángulos se expresa  $y$  en términos de  $x$

$$\frac{y}{10} = \frac{x + 8}{x}$$
$$y = \frac{10(x + 8)}{x}$$

Al sustituir la esta expresión en la longitud de la viga se obtiene queda

$$L(x) = \sqrt{(x + 8)^2 + \frac{100(x + 8)^2}{x^2}}$$

Simplificando se obtiene

$$L(x) = \frac{x+8}{x} \sqrt{x^2+100}$$

El dominio de la función es el intervalo abierto  $(0, +\infty)$  ya que  $x$  no puede ser cero y por otro lado  $x$  puede crecer sin ningún límite

Calculando la primera derivada y encontrando números críticos

$$\begin{aligned} L'(x) &= \frac{x \left[ (x+8) \frac{1}{2} (x^2+100)^{-1/2} (2x) + (x^2+100)^{1/2} \right] - (x+8)(x^2+100)^{1/2}}{x^2} \\ &= \frac{(x^2+100)^{-1/2} x^2(x+8) + x(x^2+100)^{1/2} - x(x^2+100)^{1/2} - 8(x^2+100)^{1/2}}{x^2} \\ &= \frac{(x^2+100)^{-1/2} (x^3 + 8x^2 - 8x^2 - 800)}{x^2} \\ L'(x) &= \frac{x^3 - 800}{x^2 \sqrt{x^2+100}} \end{aligned}$$

Al igualar a cero para obtener los valores críticos se obtiene

$$\begin{aligned} x^3 - 800 &= 0 \\ x &= 2 \sqrt[3]{100} \end{aligned}$$

Que es el único valor crítico en el dominio de la función. Utilizando el criterio de la primera derivada para establecer si en el valor crítico hay un mínimo

Intervalo	$L(x)$	$L'(x)$	Conclusión
$(0, 2 \sqrt[3]{100})$		-	Decreciente
$x = 2 \sqrt[3]{100}$	$(\sqrt[3]{100} + 4)^{3/2}$	0	Mínimo
$(2 \sqrt[3]{100}, +\infty)$		+	Creciente

Como solo existe un valor mínimo, éste es el mínimo absoluto. Por lo tanto

La longitud mínima de la viga es  $(\sqrt[3]{100} + 4)^{3/2} \approx 25.40$  pies

---