

PROBLEMA RESUELTO 6

Calcule la integral indefinida

$$\int \frac{x}{\sqrt{16 - 9x^4}} dx$$

Solución

Esta integral es mas complicada. Inicialmente se puede pensar que la sustitución $u = 16 - 9x^4$ puede resolver el problema. El lector puede verificar que esta sustitución no conduce a la solución. Al observar el radical nuevamente, se ve que tiene una forma similar a $\sqrt{a^2 - u^2}$, que aparece en una de las fórmulas de integración de las funciones trigonométricas inversas.

La forma correcta de resolver el problema es la siguiente

$$\int \frac{x}{\sqrt{16 - 9x^4}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{4^2 - (3x^2)^2}} dx$$

Al hacer la sustitución

$$u = 3x^2$$

El diferencial de u es

$$du = 6x dx$$

$$\frac{du}{6} = x dx$$

La integral queda expresada en términos de u como

$$\int \frac{x}{\sqrt{16 - 9x^4}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{4^2 - u^2}} \cdot \frac{du}{6}$$

La integral anterior, se calcula con la fórmula siguiente

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \text{sen}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + c$$

Al aplicarla para la integral del ejemplo se tiene

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{16 - 9x^4}} dx &= \frac{1}{6} \int \frac{1}{\sqrt{4^2 - u^2}} du \\ &= \frac{1}{6} \text{sen}^{-1}\left(\frac{u}{4}\right) + c \end{aligned}$$

Expresando la respuesta en términos de x

$$\int \frac{x}{\sqrt{16 - 9x^4}} dx = \frac{1}{6} \text{sen}^{-1}\left(\frac{3x^2}{4}\right) + c$$
