PROBLEMA RESUELTO 5

Utilice la regla de L'Hopital para determinar el límite

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} (2x-1)\tan \pi x$$

Solución

En este problema la función tiene un producto, al evaluar el límite de cada uno de los factores se tiene

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} (2x-1) = 0$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} \tan \pi x = \tan\left(\frac{\pi}{2}\right) = +\infty$$

El límite tiene forma indeterminada $0\cdot\infty$ y hay que manipular la función para cambiar la forma indeterminada

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} (2x-1)\tan \pi x = \lim_{x\to\frac{1}{2}^+} \frac{(2x-1)}{\cot \pi x}$$

El límite ahora tiene forma indeterminada $\frac{0}{0}$ y se puede aplicar la regla de L'Hopital

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} (2x-1)\tan \pi x &= \lim_{x\to\frac{1}{2}^+} \frac{(2x-1)}{\cot \pi x} \\
&= \lim_{x\to\frac{1}{2}^+} \frac{D_x(2x-1)}{D_x(\cot \pi x)} \\
&= \lim_{x\to\frac{1}{2}^+} \frac{2}{(-\csc^2 \pi x)\cdot\pi} \\
&= \lim_{x\to\frac{1}{2}^+} \frac{-2\,\text{sen}^2\, \pi x}{\pi}
\end{aligned}$$

Evaluando el último límite

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} (2x-1)\tan \pi x &= \lim_{x\to\frac{1}{2}^+} \frac{-2\,\text{sen}^2\, \pi x}{\pi} \\
&= -\frac{2}{\pi}\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\right) \\
&= -\frac{2}{\pi}\cdot(1) \\
&= -\frac{2}{\pi}
\end{aligned}$$