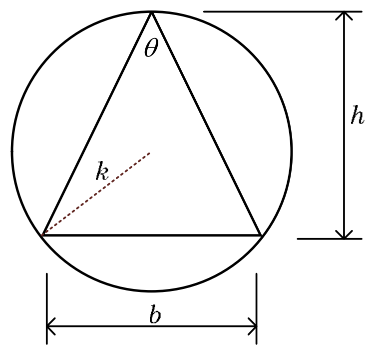
PROBLEMA RESUELTO 5

Se inscribe un triángulo isósceles en un círculo de radio k. construya una función que exprese el área del triángulo en términos de la medida del ángulo formado por los dos lados iguales. Determine la medida del ángulo de tal manera que el área del triángulo sea máxima.

Solución

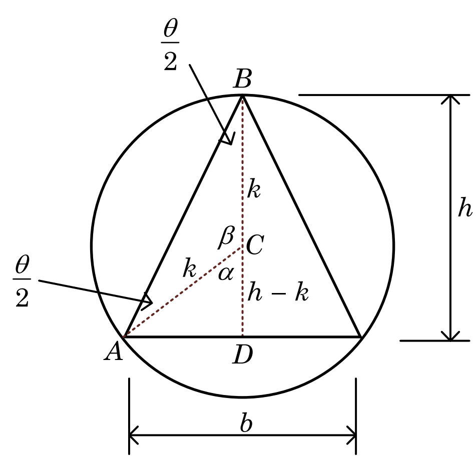
Sea θ la medida del ángulo formado por los lados iguales, h la altura del triángulo y b la base. como se muestra en la figura siguiente



Se quiere maximizar el área del triángulo

$$A = \frac{1}{2}bh$$

Ahora hay que expresar la base y la altura en términos del ángulo θ y del radio constante k. Observe la siguiente figura



El triángulo ABC es isósceles ya que tiene 2 radios como lados, sus ángulos iguales meden $\frac{\theta}{2}$. La medida del ángulo β es

$$\beta = 180 - 2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 180 - \theta$$

La medida del ángulo α esta dada por

$$\alpha = 180 - \beta = 180 - (180 - \theta) = \theta$$

Utilizando las funciones trigonométricas en el triángulo ACD

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{b/2}{k} \qquad\qquad \cos\theta = \frac{h-k}{k}$$

$$b = 2k\operatorname{sen}\theta \qquad\qquad h = k\cos\theta + k$$

El área del triángulo en términos del ángulo es

$$A = \frac{1}{2}bh$$

$$A(\theta) = \frac{1}{2}\left(2k\operatorname{sen}\theta\right)\left(k\cos\theta + k\right)$$

$$= k^2(\operatorname{sen}\theta)\left(\cos\theta + 1\right)$$

El dominio de la función esta dado por todos los valores que puede tomar el ángulo. Al observar la figura es claro que el ángulo puede variar entre 0 y 180 grados, entonces el dominio es el intervalo cerrado $\left[0, \pi\right]$

Calculando la primera derivada

$$A'(\theta) = k^2\left[(\operatorname{sen}\theta)\left(-\operatorname{sen}\theta\right) + \left(\cos\theta + 1\right)\left(\cos\theta\right)\right]$$

$$= k^2\left(-\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta + \cos\theta\right)$$

Encontrando los valores críticos

$$-\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta + \cos\theta = 0$$

$$-(1 - \cos^2\theta) + \cos^2\theta + \cos\theta = 0$$

$$2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0$$

$$(\cos\theta + 1)(2\cos\theta - 1) = 0$$

$$\cos\theta = -1, \quad \cos\theta = \frac{1}{2}$$

Los ángulos que son soluciones de la ecuación y están en el domino de la función son

$$\theta = \pi, \quad \theta = \frac{\pi}{3}$$

Evaluando la función en los extremos del intervalo y en los valores críticos

$$A(0) = k^2(\operatorname{sen}0)\left(\cos 0 + 1\right) = 0$$

$$A\left(\frac{\pi}{3}\right) = k^2\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)\left(\cos\frac{\pi}{3} + 1\right) = k^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}k^2$$

$$A(\pi) = k^2(\operatorname{sen}\pi)\left(\cos\pi + 1\right) = k^2(0)(-1 + 1) = 0$$

Entonces el área máxima del triángulo es $\frac{3\sqrt{3}}{4}k^2$, cuando el ángulo es $\theta = \frac{\pi}{3}$. O dicho de otra manera cuando el triángulo es equilátero.