PROBLEMA RESUELTO 5

Encuentre una función f tal que $f''(x) = 4 - 12x^2$, si la pendiente de la recta tangente en el punto $(1,-1)$ es igual a -2.

Solución

La primera derivada se obtiene calculando la integral indefinida de la segunda derivada

$$\begin{aligned} f'(x) &= \int f''(x)\,dx \\ &= \int \left(4 - 12x^2\right) dx \\ &= 4x - 12\left(\frac{x^3}{3}\right) + c \end{aligned}$$

$$f'(x) = 4x - 4x^3 + c$$

Se sabe que cuando $x = 1$ la pendiente de la curva es -2, es decir que $f'(1) = -2$. Al sustituir esta información se obtiene el valor de c

$$\begin{aligned} -2 &= 4(1) - 4(1)^3 + c \\ c &= -2 - 4 + 4 \\ c &= -2 \end{aligned}$$

Entonces

$$f'(x) = 4x - 4x^3 + -2$$

Integrando nuevamente para obtener la función f

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x)\,dx \\ &= \int \left(4x - 4x^3 - 2\right) dx \\ &= 4\left(\frac{x^2}{2}\right) - 4\left(\frac{x^4}{4}\right) - 2x + d \end{aligned}$$

$$f(x) = 2x^2 - x^4 - 2x + d$$

Para obtener el valor de la segunda constante d se utiliza el punto dado de la función en donde $y = -1$, cuando $x = 1$

$$-1 = 2(1)^2 - (1)^4 - 2(1) + d$$

$$d = -1 - 2 + 1 + 2 = 0$$

La función buscada es

$$f(x) = 2x^2 - x^4 - 2x$$