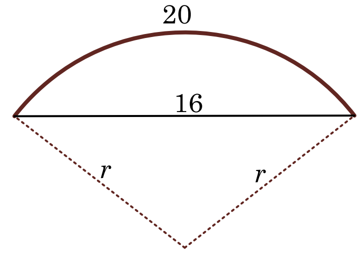
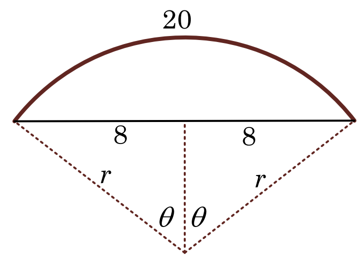
PROBLEMA RESUELTO 4

Para construir un arco deportivo para el lanzamiento de flechas, una regla de madera flexible de 20 pulgadas de longitud se doble en forma de arco circular. Si la cuerda en el arco, tiene una longitud de 16 pulgadas, como se muestra en la figura. Utilice el método de Newton para calcular el radio del círculo.



Solución

Se define como 2θ la medida del ángulo central, como se ilustra a continuación



La longitud del arco puede expresarse como

$$L = 2\theta r$$

$$20 = 2\theta r$$

$$\theta = \frac{10}{r}$$

$$\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\left(\frac{10}{r}\right)$$

Usando la función seno en el triángulo rectángulo

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{8}{r}$$

Igualando las dos expresiones para obtener una ecuación en términos de r

$$\operatorname{sen}\left(\frac{10}{r}\right) = \frac{8}{r}$$

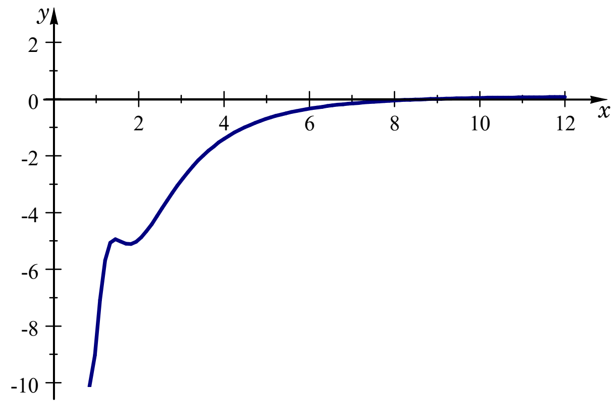
Resolviendo la ecuación por el método de Newton, la función es

$$f(r) = \operatorname{sen}\left(\frac{10}{r}\right) - \frac{8}{r}$$

La primera derivada es

$$\begin{aligned} f'(r) &= \cos\left(\frac{10}{r}\right)\left(\frac{-10}{r^2}\right) + \frac{8}{r^2} \\ &= \frac{8}{r^2} - \frac{10}{r^2}\cos\left(\frac{10}{r}\right) \\ &= \frac{2}{r^2}\left[4 - 5\cos\left(\frac{10}{r}\right)\right] \end{aligned}$$

La siguiente figura muestra la gráfica de la función $f(r) = \text{sen}\left(\frac{10}{r}\right) - \frac{8}{r}$



Utilizando la fórmula para el Método de Newton con valor inicial $r_0 = 8$

$$r_1 = r_0 - \frac{\sin\left(\frac{10}{r_0}\right) - \frac{8}{r_0}}{\frac{2}{(r_0)^2}\left(4 - 5\cos\left(\frac{10}{r_0}\right)\right)} = 8 - \frac{\sin\left(\frac{10}{8}\right) - \frac{8}{8}}{\frac{2}{(8)^2}\left(4 - 5\cos\left(\frac{10}{8}\right)\right)}$$

$$= 8 + 0.67 = 8.67$$

$$r_2 = r_1 - \frac{\sin\left(\frac{10}{r_1}\right) - \frac{8}{r_1}}{\frac{2}{(r_1)^2}\left(4 - 5\cos\left(\frac{10}{r_1}\right)\right)} = 8.67 - \frac{\sin\left(\frac{10}{8.67}\right) - \frac{8}{8.67}}{\frac{2}{(8.67)^2}\left(4 - 5\cos\left(\frac{10}{8.67}\right)\right)}$$

$$= 8.67 + 0.163 = 8.833$$

$$r_3 = r_2 - \frac{\sin\left(\frac{10}{r_2}\right) - \frac{8}{r_2}}{\frac{2}{(r_2)^2}\left(4 - 5\cos\left(\frac{10}{r_2}\right)\right)} = 8.833 - \frac{\sin\left(\frac{10}{8.833}\right) - \frac{8}{8.833}}{\frac{2}{(8.833)^2}\left(4 - 5\cos\left(\frac{10}{8.833}\right)\right)}$$

$$= 8.833 + 0.0079 = 8.841$$

$$r_4 = r_3 - \frac{\sin\left(\frac{10}{r_3}\right) - \frac{8}{r_3}}{\frac{2}{(r_3)^2}\left(4 - 5\cos\left(\frac{10}{r_3}\right)\right)} = 8.841 - \frac{\sin\left(\frac{10}{8.841}\right) - \frac{8}{8.841}}{\frac{2}{(8.841)^2}\left(4 - 5\cos\left(\frac{10}{8.841}\right)\right)}$$

$$= 8.841 - 0.00007 = 8.841$$

El radio tiene una medida aproximada de 8.841 pulgadas