PROBLEMA RESUELTO 4

Dibuje la gráfica de una función continua, que satisface las siguientes condiciones

$f(-2) = 2, \quad f(1) = -1, \quad f(4) = 2$

$f'(-2)$ no existe, $\quad f'(1) = 0, \quad f''(-2)$ no existe, $\quad f''(4) = 0$

$f'(x) > 0$, en $x < -2$ y $x > 1$. $\quad f'(x) < 0$, en $-2 < x < 1$.

$f''(x) > 0$, en $x < -2$ y $-2 < x < 4$. $\quad f''(x) < 0$, en $x > 4$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -2, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$

Solución

En este problema no se conoce la función, sino únicamente algunas características de ella.

Se recomienda seguir el mismo procedimiento utilizado en los ejemplos anteriores, es decir, primero obtener los valores críticos, luego construir los intervalos y por medio de una tabla hacer un estudio de cada uno de los intervalos, basándose en la información proporcionada.

Los valores críticos se obtienen de todos los intervalos proporcionados, estos son

$$x = -2, \quad x = 1 \quad \text{y} \quad x = 4$$

Los intervalos donde se debe realizar el análisis son

$$(-\infty,-2), \quad (-2,1), \quad (1,4), \quad (4,+\infty)$$

Ahora debemos construir la tabla, en donde se analiza el comportamiento de la función en cada intervalo, los signos correspondientes a la primera y segunda derivada se obtienen de los datos del problema

Intervalo	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusión
$(-\infty,-2)$		+	+	Creciente, cóncava hacia arriba
$x = -2$	2	$\nexists$	$\nexists$	Máximo relativo, punto anguloso
$(-2,1)$		–	+	Decreciente, cóncava hacia arriba
$x = 1$	-1	0	+	Mínimo, cóncava hacia arriba
$(1,4)$		+	+	Creciente, cóncava hacia arriba
$x = 4$	2	+	0	Creciente, punto de inflexión
$(4,+\infty)$		+	–	Creciente, cóncava hacia abajo

Para concluir se observa que la gráfica tiene dos asíntotas horizontales, las cuales se obtienen de los limites $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -2$ y $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$. Estas asíntotas son las rectas $y = -2$ y $y = 2$

Al trazar la gráfica de una función que satisface las condiciones anteriores, se obtiene la siguiente figura