PROBLEMA RESUELTO 4

Utilice la regla de L'Hopital para determinar el límite

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$$

Solución

Observe que el límite está compuesto por una diferencia de fracciones. Al separar las fracciones se obtiene

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}\right)-\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}\right)=\infty-\infty$$

Como el límite tiene forma indeterminada $\infty-\infty$, no se puede utilizar la regla de L'hopital. Al efectuar la suma de las fracciones se tiene

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}\right)$$

Observe ahora que al evaluar el límite del numerador y el límite del denominador se obtiene la forma indeterminada $\frac{0}{0}$. Ahora se puede utilizar la regla de L'Hopital.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)&=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}\right)\\&=\lim_{x\to 1}\frac{D_x\left(x-1-\ln x\right)}{D_x\left((x-1)\ln x\right)}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{(x-1)\frac{1}{x}+\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{(x-1)+x\ln x}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x-1+x\ln x}\end{aligned}$$

Al evaluar, nuevamente se obtiene la forma indeterminada $\frac{0}{0}$, razón por la que se procede a aplicar nuevamente la regla de L'Hopital

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)&=\lim_{x\to 1}\frac{D_x\left(x-1\right)}{D_x\left(x-1+x\ln x\right)}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+x\frac{1}{x}+\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+1+\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{2+\ln x}\end{aligned}$$

Finalmente, el último límite se puede calcular por evaluación para calcular la respuesta

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)&=\lim_{x\to 1}\frac{1}{2+\ln x}\\&=\frac{1}{2+0}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$