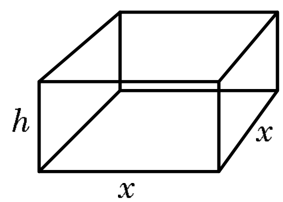
PROBLEMA RESUELTO 4

Un depósito en forma de caja rectangular abierta tiene un volumen de 250 centímetros cúbicos tiene una base cuadrada. El costo del material para la base es de Q6 por centímetro cuadrado y el del material para los lados es de Q2 por centímetro cuadrado. Determine las dimensiones del depósito del tal manera que, el costo del material utilizado en su fabricación sea mínimo.

Solución

La siguiente figura muestra una caja rectangular abierta con volumen de 250 centímetros cúbicos, en donde x el lado de la base cuadrada y h es la altura de la caja



El costo del material es la suma del costo de la base y del costo de las 4 paredes. El costo de cada pared se encuentra multiplicando el área de la pared por el costo del material,

$$\begin{aligned} C &= 6(x^2) + 2(4xh) \\ &= 6x^2 + 8xh \end{aligned}$$

Como el volumen de la caja es 250 se tiene que

$$\begin{aligned} x^2 h &= 250 \\ h &= \frac{250}{x^2} \end{aligned}$$

Sustituyendo h en la expresión para el costo

$$\begin{aligned} C(x) &= 6x^2 + 8x\left(\frac{250}{x^2}\right) \\ &= 6x^2 + \frac{2000}{x} \\ &= \frac{6x^3 + 2000}{x} \end{aligned}$$

Para establecer el dominio de esta función observe x debe ser mayor que cero, no puede ser cero pues la función no está definida cuando $x = 0$. Por otro lado, el valor de x puede crecer sin límite pues no hay ninguna condición que restrinja su crecimiento, por lo tanto, el dominio de la función es

$$(0, +\infty)$$

Calculando la primera derivada

$$C'(x) = D_x\left(\frac{6x^3 + 2000}{x}\right)$$

$$\begin{aligned} C'(x) &= \frac{x(18x^2) - (6x^3 + 2000)(1)}{x^2} \\ &= \frac{18x^3 - 6x^3 - 2000}{x^2} \\ &= \frac{12x^3 - 2000}{x^2} \end{aligned}$$

Igualando la primera derivada a cero y despejando x para obtener los valores críticos

$$\begin{aligned} \frac{12x^3 - 2000}{x^2} &= 0 \\ 12x^3 - 2000 &= 0 \\ x^3 &= \frac{2000}{12} \\ x &= \sqrt[3]{\frac{500}{3}} = 5\sqrt[3]{\frac{4}{3}} \approx 5.50 \end{aligned}$$

Como el dominio de la función es un intervalo abierto, se utilizará el criterio de la primera derivada para establecer si en el valor crítico la función tiene un mínimo.

Intervalo	$C(x)$	$C'(x)$	Conclusión
$(0, 5.50)$		-	Decreciente
$x = 5.50$	545.14	0	Mínimo relativo
$(5.50, +\infty)$		+	Creciente

Por lo tanto, el costo mínimo de la caja es Q545.14, cuando las dimensiones de la caja son aproximadamente

$$x = 5.50\,\text{cm} \quad \text{y} \quad h = \frac{250}{x^2} = \frac{250}{(5.50)^2} = 8.26\,\text{cm}$$

La figura siguiente muestra la gráfica de la función en donde se puede verificar los cálculos realizados