3.4 Trazo de gráficas

INTRODUCCIÓN

En ésta sección se utiliza la primera derivada para encontrar los valores máximo y mínimo de una función, así como para determinar los intervalos en donde la función es creciente o decreciente, también se utiliza la segunda derivada para encontrar los puntos de inflexión de la gráfica de una función así como los intervalos donde es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo. Con la información proporcionada por la primera y segunda derivada se dibuja en forma precisa la gráfica de la función.

OBJETIVOS

Al finalizar el estudio y desarrollar las actividades de esta unidad el estudiante estará en capacidad de capacidad de:

- Encontrar los valores máximos y mínimos de una función utilizando los criterios de primera o segunda derivada.
- Determinar si una función es creciente o decreciente en un intervalo usando la primera derivada.
- Encontrar los puntos de inflexión de la gráfica de una función utilizando la segunda derivada.
- Determinar si una función es cóncava hacia arriba o hacia abajo utilizando la segunda derivada.
- Dibujar la representación gráfica de una función utilizando la información proporcionada por la primera y la segunda derivada.

Máximo relativo o máximo local

$f(c)$ es un máximo relativo de la función f, si existe un intervalo abierto que contiene a c en donde $f(c) \geq f(x)$ para todo x en el intervalo abierto.

La figura 1 muestra la gráfica de dos máximos relativos, en el primero, la primera derivada es igual a cero en $x = c$ y hay una tangente horizontal, mientras que el segundo la derivada no está definida en c

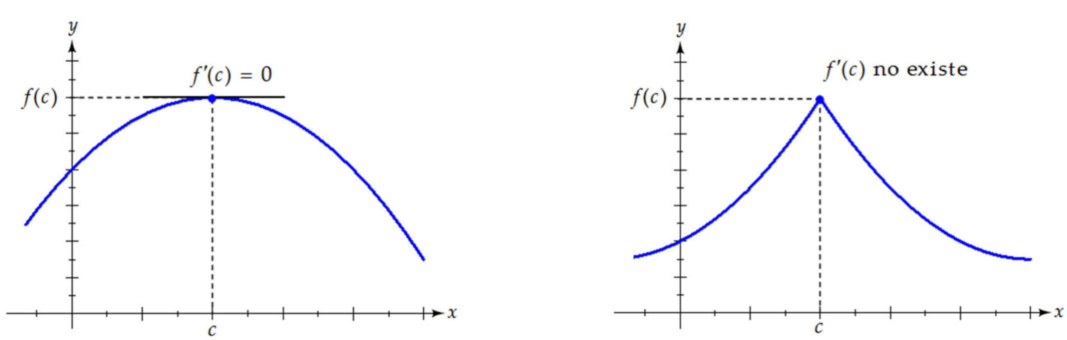


Figura 1

Mínimo relativo o máximo local

$f(c)$ es un mínimo relativo de la función f, si existe un intervalo abierto que contiene a c en donde $f(c) \leq f(x)$ para todo x en el intervalo abierto.

La figura 2 muestra la gráfica de dos mínimos relativos, en el primero, la primera derivada es igual a cero en $x = c$ y hay una tangente horizontal, mientras que el segundo la derivada no está definida en c.

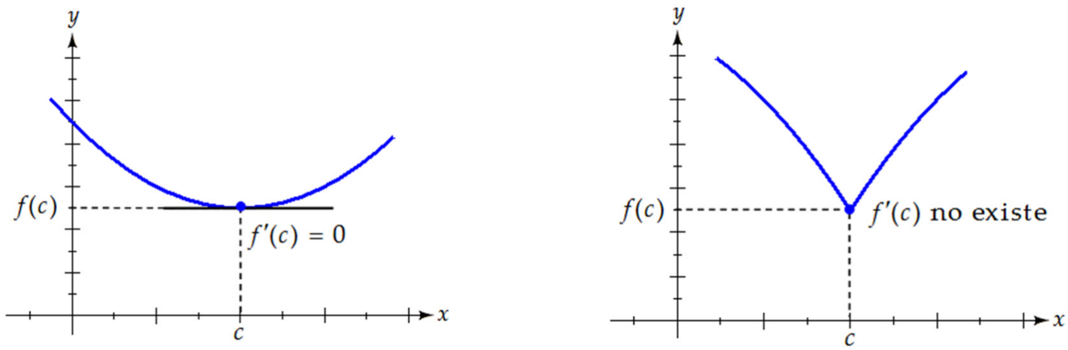


Figura 2

Valor crítico o punto crítico

Si c es un número en el dominio de la función f es decir que $f(c)$ existe y si $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no está definida, entonces el número $x = c$ es un valor crítico de f y el punto $(c, f(c))$ se llama punto crítico.

Los máximos o mínimos relativos siempre se localizan en un punto crítico de la función.

Función creciente

Una función f es creciente en un intervalo si $f(x_1) < f(x_2)$ para todo $x_1 < x_2$ en el intervalo. Si la función es creciente entonces $f'(x) > 0$. La figura 3 muestra la gráfica de una función creciente.

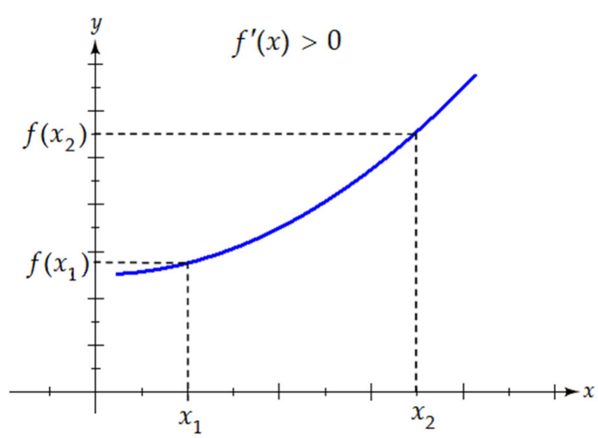


Figura 3

Función Decreciente

Una función f es decreciente en un intervalo si $f(x_1) > f(x_2)$ para todo $x_1 < x_2$ en el intervalo. Si la función es decreciente entonces $f'(x) < 0$. La figura 4 muestra la gráfica de una función decreciente.

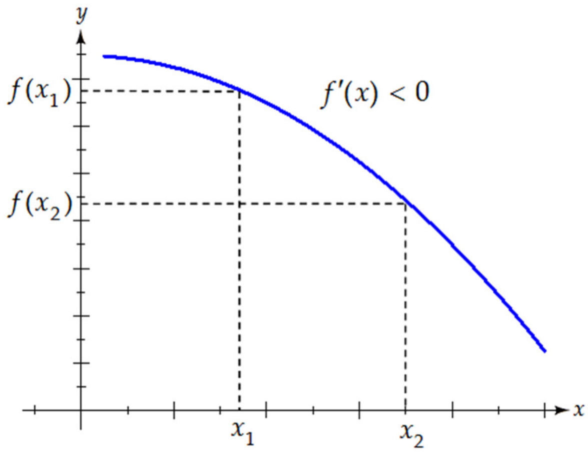


Figura 4

Criterio de la primera derivada

Si f es una función continua en un intervalo abierto que contiene al número crítico $x = c$ y f es diferenciable en el intervalo, excepto posiblemente en c. Entonces $f(c)$ puede clasificarse como sigue:

Criterio para Máximo relativo

$f(c)$ es un máximo relativo si $f'(x)$ cambia de positiva a negativa al pasar por $x = c$. La figura 5 muestra una función que tiene un máximo relativo en c.

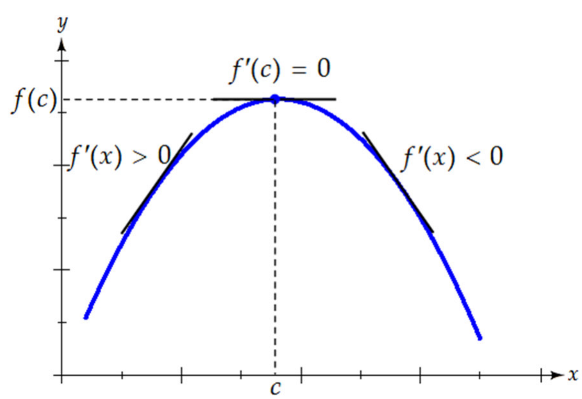


Figura 5

Criterio para Mínimo relativo

$f(c)$ es un mínimo relativo si $f'(x)$ cambia de negativa a positiva al pasar por $x = c$.

Si $f'(c)$ es positiva en ambos lados de c o negativa en ambos lados de c, entonces $f(c)$ no es ni máximo relativo ni mínimo relativo. La figura 6 muestra la gráfica de una función con un mínimo relativo en c.

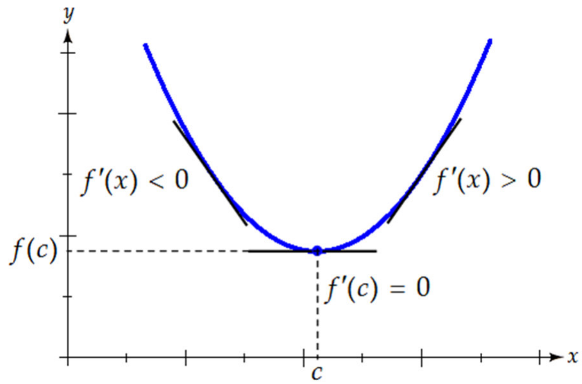


Figura 6

Función cóncava hacia arriba

Una función *f* es cóncava hacia arriba en un intervalo si $f''(x)$ está definida para todos los números en el intervalo y $f''(x) > 0$ en todo el intervalo. La figura 7 muestra la gráfica de una función cóncava hacia arriba

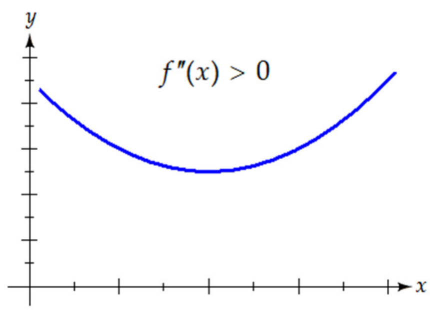


Figura 7

Función cóncava hacia abajo

Una función *f* es cóncava hacia abajo en un intervalo, si $f''(x)$ está definida para todos los números en el intervalo y $f''(x) < 0$ en todo el intervalo. La figura 8 muestra la gráfica de una función cóncava hacia abajo.

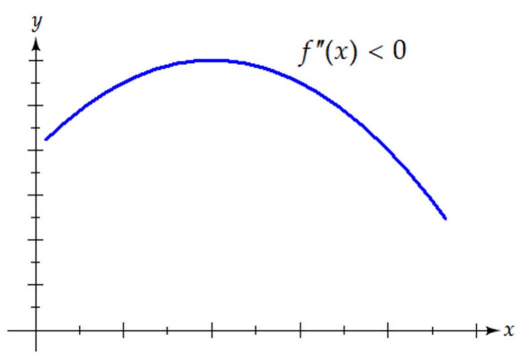


Figura 8

Punto de inflexión

Si f es una función continua en un intervalo abierto que contiene a c. El punto $(c, f(c))$ se llama punto de inflexión de la gráfica de f, si la gráfica cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo (o bien cambia de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba) en ese punto y además la gráfica de la función tiene una recta tangente en el punto.

En un punto de inflexión $f''(c) = 0$ o bien $f''(c)$ no existe. La figura 9 muestra la gráfica de un punto de inflexión en donde la segunda derivada es igual a cero

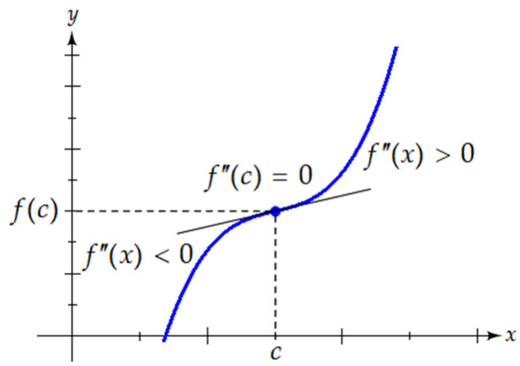


Figura 9

Criterio de la segunda derivada para máximo relativo

Si f es una función tal que $f'(c) = 0$ y la segunda derivada está definida en un intervalo abierto que contiene a c. Si $f''(c) < 0$ (es decir que la función es cóncava hacia abajo), entonces la función tiene un máximo relativo en $x = c$.

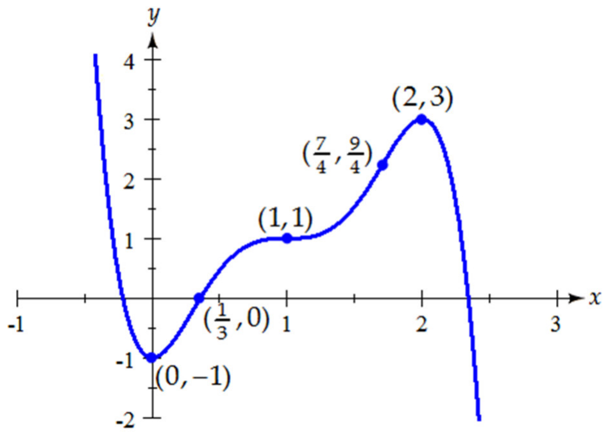
Criterio de la segunda derivada para mínimo relativo

Si f es una función tal que $f'(c) = 0$ y la segunda derivada está definida en un intervalo abierto que contiene a c. Si $f''(c) > 0$ (es decir que la función es cóncava hacia arriba), entonces la función tiene un mínimo relativo en $x = c$.

El criterio de la segunda derivada no se puede aplicar cuando $f''(c) = 0$ o cuando $f''(c)$ no existe, en cuyo caso debe usarse el criterio de primera derivada.

Ejemplo 1: Análisis de una gráfica

La figura muestra la gráfica de una función f, a partir de ella responda cada uno de los incisos siguientes



a. Encuentre los intervalos donde la función es creciente.

b. Encuentre los intervalos donde la función es decreciente.

c. Encuentre los máximos y los mínimos relativos.

d. Encuentre los intervalos donde la función es cóncava hacia arriba.

e. Encuentre los intervalos donde la función es cóncava hacia abajo.

f. Encuentre los puntos de inflexión

Solución

a. Una función es creciente cuando los valores de $f(x)$ aumentan al recorrer la gráfica de izquierda a derecha. Al observar la gráfica notamos que crece desde el punto $(0,-1)$ hasta el punto $(1,1)$ y sigue creciendo del punto $(1,1)$ al punto $(2,3)$; por lo que los intervalos sobre el eje x donde la función es creciente son: $0 < x < 1$ y $1 < x < 2$. Al utilizar la nomenclatura de intervalos se puede decir que la función es creciente en

$$(0,1) \cup (1,2)$$

b. Al observar la gráfica de la misma forma que en el inciso anterior, notamos que está decreciendo en

$$(-\infty,0) \cup (2,\infty)$$

Recuerde que los intervalos están sobre el eje x.

c. El máximo relativo de la función es $f(2) = 3$ y está en el punto $(2,3)$ ya que la función es creciente para x menor que 2 y es decreciente para x mayor que 2.

El mínimo relativo es $f(0) = -1$ y se localiza en el punto $(0,-1)$ ya que la función es decreciente para valores menores que 0 y es creciente para valores mayores que 0.

d. De acuerdo con la definición, una función es cóncava hacia arriba cuando el arco de la curva abre hacia arriba; por otro lado es claro que la gráfica cambia de concavidad en los puntos de inflexión que se pueden localizar en la gráfica. Se concluye entonces que la función es cóncava hacia arriba en los intervalos

$$(-\infty,\tfrac{1}{3}) \cup (1,\tfrac{7}{4})$$

e. La función es cóncava hacia abajo en donde el arco de la curva abre hacia abajo, esto es en los intervalos

$$(\tfrac{1}{3},1) \cup (\tfrac{7}{4},\infty)$$

f. Los puntos de inflexión son aquellos donde la curva cambia de concavidad y además hay una recta tangente en ese punto. Estos son

$$(\tfrac{1}{3},0),\ (1,1),\ (\tfrac{7}{4},\tfrac{9}{4})$$

Ejemplo 2: Trazo de una función polinomial

Encuentre los intervalos donde la función dada es creciente, intervalos donde es decreciente, intervalos donde es cóncava hacia arriba, intervalos donde es cóncava hacia abajo, encuentre los máximos y mínimos relativos, los puntos de inflexión y trace la gráfica.

$$f(x) = 3x^4 + 4x^3$$

Solución

El primer paso es calcular la primera derivada y la segunda derivada.

$$f'(x) = D_x\left[3x^4 + 4x^3\right] = 12x^3 + 12x^2$$

$$f''(x) = D_x\left[12x^3 + 12x^2\right] = 36x^2 + 24x$$

Ahora hay que encontrar los valores críticos, para ello se iguala a cero la primera y la segunda derivada y se resuelven las ecuaciones resultantes.

$$f'(x) = 0$$

$$12x^3 + 12x^2 = 0$$

$$12x^2(x + 1) = 0$$

Igualando a cero cada uno de los factores se tiene

$$12x^2 = 0 \qquad x + 1 = 0$$

$$x^2 = 0 \qquad x = -1$$

$$x = 0$$

De donde los números críticos de la primera derivada son $x = 0$ y $x = -1$

Al hacer lo mismo para la segunda derivada se tiene

$$36x^2 + 24x = 0$$

$$12x(3x + 2) = 0$$

Si $12x = 0$ entonces, $x = 0$ si $3x + 2 = 0$ entonces $x = -\dfrac{2}{3}$

Con los números críticos de la primera y segunda derivada se construyen los intervalos del dominio de la función, en los cuales hay que realizar el análisis, estos intervalos son

$$(-\infty, -1), \quad (-1, -\frac{2}{3}), \quad (-\frac{2}{3}, 0), \quad (0, \infty)$$

Observe que los intervalos se han construido de tal forma que los números críticos están ordenados de menor a mayor en la recta numérica para que ningún intervalo se traslape con otro.

Una vez construidos los intervalos se procede a analizar el comportamiento de la función en cada uno de ellos, para ello lo más conveniente es colocar la información en una tabla, como la que se muestra a continuación.

Intervalo	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusión
$(-\infty, -1)$	*	-	+	Decreciente, cóncava hacia arriba
$x = -1$	-1	0	+	Mínimo relativo
$\left(-1, -\frac{2}{3}\right)$	*	+	+	Creciente, cóncava hacia arriba
$x = -\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	+	0	Punto de inflexión
$(-\frac{2}{3}, 0)$	*	+	-	Creciente, cóncava hacia abajo
$x = 0$	0	0	0	Punto de inflexión
$(0, \infty)$	*	+	+	Creciente, cóncava hacia arriba

Para que quede claro como se completa la tabla se explica paso a paso como se obtienen los resultados de la primera fila, las demás filas se completan de forma similar

Se elige arbitrariamente un valor de prueba en el intervalo $(-\infty, -1)$, esto es cualquier valor que esté dentro del intervalo, se utilizará $x = -2$. Este número se evalúa en la primera derivada, el signo del resultado nos indicará si la función es creciente o decreciente en ese intervalo.

$$f'(-2) = 12(-2)^3 + 12(-2)^2 = 12(-8) + 12(4) = -96 + 48 = -48$$

Como la primera derivada es negativa, se anota el signo menos en la columna de la primera derivada y se concluye que la función es decreciente en el intervalo $(-\infty, -1)$.

Ahora se evalúa el mismo valor de prueba en la segunda derivada, para saber si la función es cóncava hacia arriba o hacia abajo

$$f''(-2) = 36(-2)^2 + 24(-2) = 36(4) - 48 = 144 - 48 = 96$$

Como la segunda derivada es positiva, se anota el signo más y se concluye que la función es cóncava hacia arriba en el intervalo $(-\infty, -1)$.

Este proceso se repite para cada intervalo hasta completar todos los intervalos. La tabla completa es la mostrada anteriormente.

Al terminar de llenar la tabla para los intervalos se procede a analizar lo que ocurre en los números críticos. Se analizará el primer valor crítico $x = -1$. Primero se evalúa en la función para obtener el valor de y.

$$f(-1) = 3(-1)^4 + 4(-1)^3 = 3(1) + 4(-1) = 3 - 4 = -1$$

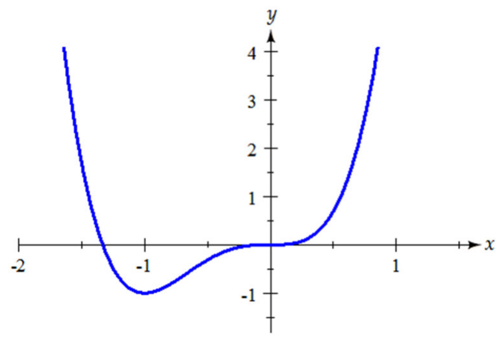
El valor obtenido se anota en la tabla ya que corresponde a un punto de la gráfica. Al evaluar $x = -1$ en la primera derivada se obtiene como resultado 0, lo que nos confirma que $x = -1$ es un valor crítico.

Usando el criterio de la primera derivada se tiene que en el intervalo anterior a $x = -1$ la función es decreciente y en el intervalo posterior a $x = -1$ la función es creciente, concluyendo que en $x = -1$ la función tiene un mínimo relativo; y el valor mínimo es -1.

En éste caso también se puede usar el criterio de segunda derivada para concluir el resultado anterior. Como al evaluar $x = -1$ en la segunda derivada se obtiene un resultado positivo, por lo que, la función es cóncava hacia arriba en $x = -1$ y la función tiene un mínimo relativo en ese valor crítico.

Siguiendo el mismo procedimiento se analizan los otros valores críticos. Al completar la tabla se procede a dibujar su representación gráfica.

Para dibujar la gráfica comience por dibujar los puntos correspondientes a los valores críticos, estos son $(-1,-1)$, $\left(-\frac{2}{3},-\frac{16}{27}\right)$ y $(0,0)$. Una vez graficados los puntos proceda a dibujar las partes de la curva que corresponden a cada uno de los intervalos indicados en la tabla. La representación gráfica de la función queda como se muestra en la figura es la siguiente



Ejemplo 3: Trazo de una función con exponentes racionales

Encuentre los intervalos donde la función dada es creciente, intervalos donde es decreciente, intervalos donde es cóncava hacia arriba o hacia abajo, máximos y mínimos locales, puntos de inflexión y dibuje la representación gráfica.

$$f(x) = x^{2/3} - 2x^{1/3}$$

Solución

Primero se calcula la primera y segunda derivada, simplificando las expresiones obtenidas

$$f'(x) = D_x(x^{2/3} - 2x^{1/3}) = \tfrac{2}{3}x^{-1/3} - \tfrac{2}{3}x^{-2/3}$$

$$= \frac{2}{3x^{1/3}} - \frac{2}{3x^{2/3}} = \frac{2x^{1/3} - 2}{3x^{2/3}}$$

$$f''(x) = D_x(\tfrac{2}{3}x^{-1/3} - \tfrac{2}{3}x^{-2/3}) = -\frac{2}{9}x^{-4/3} + \frac{4}{9}x^{-5/3}$$

$$= -\frac{2}{9x^{4/3}} + \frac{4}{9x^{5/3}} = \frac{-2x^{1/3} + 4}{9x^{5/3}}$$

Calculando los valores críticos de la primera y segunda derivada. Recuerde que los valores críticos son aquellos que hacen cero el numerador o bien el denominador.

Si $f'(x) = 0$, entonces

$$\frac{2x^{1/3} - 2}{3x^{2/3}} = 0$$

Para que una fracción sea igual a cero, es suficiente que el numerador sea igual a cero, por lo que se obtiene

$$2x^{1/3} - 2 = 0$$

$$x^{1/3} = 1$$

$$x = (1)^3 = 1$$

Por otro lado cuando $x = 0$ la primera derivada no está definida ya que el denominador es cero. Por lo tanto los valores críticos de la primera derivada son $x = 1$ y $x = 0$.

Si $f''(x) = 0$ entonces

$$\frac{-2x^{1/3} + 4}{9x^{5/3}} = 0$$

$$-2x^{1/3} + 4 = 0$$

$$x^{1/3} = 2$$

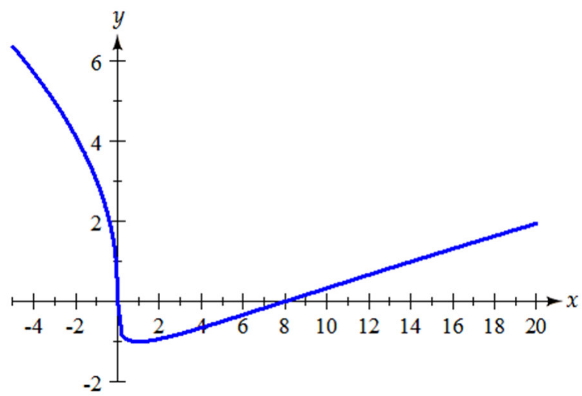
$$x = (2)^3 = 8$$

Como de nuevo, la segunda derivada no está definida cuando $x = 0$, los valores críticos de la segunda derivada son $x = 8$ y $x = 0$.

La tabla siguiente resume los resultados para cada intervalo. Recuerde que para construir ésta tabla debe tomar un valor de prueba en cada intervalo y evaluarlo en la primera derivada para establecer si la función es creciente o decreciente, luego evaluarlo en la segunda derivada para saber si la función es cóncava hacia arriba o hacia abajo.

Intervalo	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusión
$(-\infty,0)$		$-$	$-$	Decreciente, cóncava hacia abajo
$x = 0$	0	$\nexists$	$\nexists$	Punto de inflexión
$(0,1)$		$-$	$+$	Decreciente, cóncava hacia arriba
$x = 1$	-1	0	$+$	Mínimo local, cóncava hacia arriba
$(1,8)$		$+$	$+$	Creciente, cóncava hacia arriba
$x = 8$	0	$+$	0	Creciente, punto de inflexión
$(8,\infty)$		$+$	$-$	Creciente, cóncava hacia abajo

Localizando primero los puntos correspondientes a los valores críticos y luego trazando la curva intervalo por intervalo, se obtiene la gráfica mostrada en la siguiente figura


y
6
4
2
-2
x
-4
-2
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20