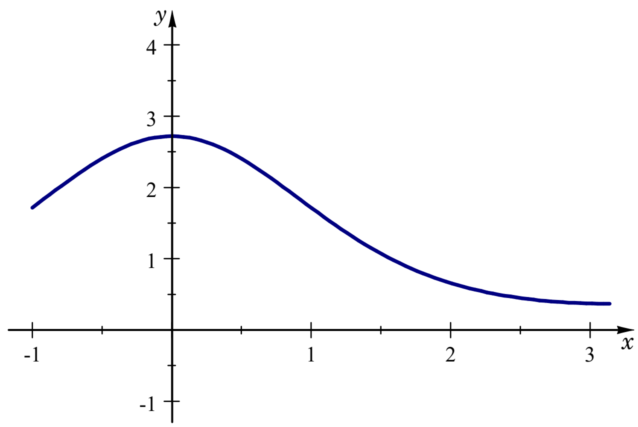
PROBLEMA RESUELTO 3

Utilice el método de Newton para encontrar la coordenada x del punto de inflexión de la curva con tres cifras decimales

$$y = e^{\cos x}, \quad 0 < x < \pi$$

Solución

La gráfica de la función se muestra en la siguiente figura. El punto de inflexión se encuentra muy cercano a $x = 1$



Para encontrar las coordenadas del punto de inflexión es necesario calcular la segunda derivada e igualarla a cero,

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\cos x} \\ f'(x) &= e^{\cos x}(-\operatorname{sen} x) \\ f''(x) &= e^{\cos x}(-\cos x) + (-\operatorname{sen} x)e^{\cos x}(-\operatorname{sen} x) \\ &= e^{\cos x}\left(-\cos x + \operatorname{sen}^2 x\right) \\ &= e^{\cos x}\left(\operatorname{sen}^2 x - \cos x\right) \end{aligned}$$

Para encontrar los valores críticos se debe resolver la ecuación

$$e^{\cos x}\left(\operatorname{sen}^2 x - \cos x\right) = 0$$

Como la función exponencial no puede ser cero, el problema se reduce a resolver la ecuación

$$\operatorname{sen}^2 x - \cos x = 0$$

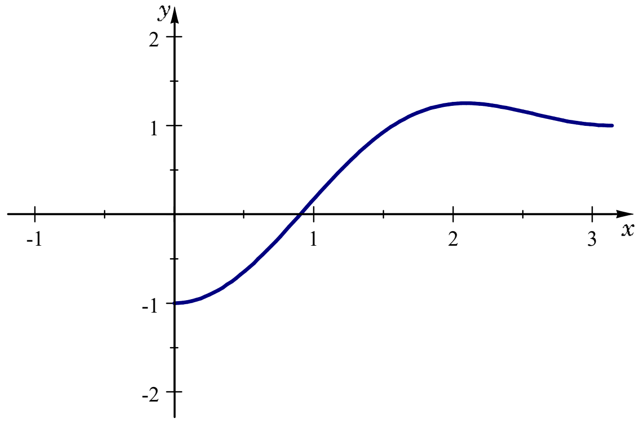
La función a utilizar con el método de Newton es

$$g(x) = \operatorname{sen}^2 x - \cos x$$

La primera derivada es

$$g'(x) = 2\operatorname{sen} x \cos x + \sin x$$

La siguiente figura muestra la gráfica de la función en el intervalo $0 < x < \pi$



Utilizando la fórmula para el Método de Newton

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} \\
&= x_n - \frac{\operatorname{sen}^2(x_n) - \cos(x_n)}{2\operatorname{sen}(x_n)\cos(x_n) + \operatorname{sen}(x_n)}
\end{aligned}
$$

Ahora hay que evaluar repetidamente esta expresión, iniciando con $x_0 = 1$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_0 - \frac{\operatorname{sen}^2(x_0) - \cos(x_0)}{2\operatorname{sen}(x_0)\cos(x_0) + \operatorname{sen}(x_0)} = 1 - \frac{\operatorname{sen}^2(1) - \cos(x1)}{2\operatorname{sen}(1)\cos(1) + \operatorname{sen}(1)} \\
&= 1 - 0.096 \\
&= 0.904
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_2 &= x_1 - \frac{\operatorname{sen}^2(x_1) - \cos(x_1)}{2\operatorname{sen}(x_1)\cos(x_1) + \operatorname{sen}(x_1)} = (0.904) - \frac{\operatorname{sen}^2(0.904) - \cos(0.904)}{2\operatorname{sen}(0.904)\cos(0.904) + \operatorname{sen}(0.904)} \\
&= (0.904) + 0.0005 \\
&= 0.9045
\end{aligned}
$$

Como en las últimas dos iteraciones se mantienen los 3 decimales podemos concluir que la solución de la ecuación con 3 decimales es $x = 0.904$

Por lo que el punto de inflexión se localiza en $x = 0.904$