PROBLEMA RESUELTO 3

Encuentre los intervalos donde la función dada es creciente, intervalos donde es decreciente, intervalos donde es cóncava hacia arriba o hacia abajo, máximos y mínimos locales, puntos de inflexión y dibuje la representación gráfica.

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$$

Solución

Primero se calcula la primera y segunda derivada, simplificando las expresiones obtenidas

$$\begin{aligned} D_x\left(\frac{x^3}{x^2-4}\right) &= \frac{\left(x^2-4\right)\left(3x^2\right) - x^3(2x)}{\left(x^2-4\right)^2} \\ &= \frac{3x^4 - 12x^2 - 2x^4}{\left(x^2-4\right)^2} \\ &= \frac{x^2\left(x^2-12\right)}{\left(x^2-4\right)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_x\left(\frac{x^4-12x^2}{\left(x^2-4\right)^2}\right) &= \frac{\left(x^2-4\right)^2\left(4x^3-24x\right) - \left(x^4-12x^2\right)(2)(x^2-4)(2x)}{\left(x^2-4\right)^4} \\ &= \frac{\left(x^2-4\right)\left(4x^3-24x\right) - 4x\left(x^4-12x^2\right)}{\left(x^2-4\right)^3} \\ &= \frac{4x^5 - 40x^3 + 96x - 4x^4 + 48x^3}{\left(x^2-4\right)^3} \\ &= \frac{4x\left(x^4 - x^3 + 2x^2 + 24\right)}{\left(x^2-4\right)^3} \end{aligned}$$

Calculando los valores críticos de la primera y segunda derivada. Recuerde que los valores críticos son aquellos que hacen cero el numerador o bien el denominador.

Si $f'(x) = 0$, entonces

$$\frac{x^2\left(x^2-12\right)}{\left(x^2-4\right)^2} = 0$$

Para que una fracción sea igual a cero, es suficiente que el numerador sea igual a cero, por lo que se obtiene

$$x^2(x^2 - 12) = 0$$

$$x = 0, \quad x = 2\sqrt{3}, \quad x = -2\sqrt{3}$$

Por otro lado cuando $x = 2$ y cuando $x = -2$ la primera derivada no está definida ya que el denominador es cero. Por lo tanto los valores críticos de la primera derivada son

$$x = -2\sqrt{3}, \quad x = -2, \quad x = 0, \quad x = 2, \quad x = 2\sqrt{3},$$

Si $f''(x) = 0$ entonces

$$\frac{4x\left(x^4 - x^3 + 2x^2 + 24\right)}{\left(x^2 - 4\right)^3} = 0$$

Al igualar a cero el numerador se obtiene que $x = 0$, es la única raíz real, ya que la ecuación polinomial entre paréntesis no tiene raíces reales.

La segunda derivada no está definida cuando $x = -2$ y $x = 2$ los valores críticos de la segunda derivada son

$$x = -2\,,\ x = 0\ \ x = 2$$

La tabla siguiente resume los resultados para cada intervalo. Recuerde que para construir esta tabla debe tomar un valor de prueba en cada intervalo y evaluarlo en la primera derivada para establecer si la función es creciente o decreciente, luego evaluarlo en la segunda derivada para saber si la función es cóncava hacia arriba o hacia abajo.

Intervalo	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusión
$\left(-\infty, -2\sqrt{3}\right)$		+	–	Creciente, cóncava hacia abajo
$x = -2\sqrt{3}$	-5.2	0	–	Máximo relativo, cóncava hacia abajo
$\left(-2\sqrt{3}, -2\right)$		–	–	Decreciente, cóncava hacia abajo
$x = -2$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	Asíntota vertical
$(-2, 0)$		-	+	Decreciente, cóncava hacia arriba
$x = 0$	0	-	0	Decreciente, punto de inflexión
$(0, 2)$		–	–	Decreciente, cóncava hacia abajo
$x = 2$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	Asíntota vertical
$\left(2, 2\sqrt{3},\right)$		–	+	Decreciente, cóncava hacia arriba
$x = 2\sqrt{3}$	5.2	0	+	Mínimo relativo, cóncava hacia arriba
$\left(2\sqrt{3}, +\infty\right)$		+	+	Creciente, cóncava hacia arriba

Para construir la gráfica de esta función, primero se trazan las asíntotas verticales, los interceptos con los ejes de coordenadas, los máximos y los mínimos. Finalmente se dibuja una curva en cada intervalo que satisface las condiciones del mismo. La gráfica final se muestra en la siguiente figura