PROBLEMA RESUELTO 3

Utilice la regla de L'Hopital para determinar el límite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+e^x)}{3x}$$

Solución

Al evaluar el límite del numerador y el límite del denominador se obtiene

$$\lim_{x\to+\infty} \left(x+e^x\right) = \infty + \infty = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(3x\right) = 3(+\infty) = +\infty$$

Como tanto el numerador como el denominador se aproximan al infinito, el límite tiene forma $\frac{+\infty}{+\infty}$ y se puede aplicar la regla de L'Hopital

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+e^x)}{3x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{D_x\left[\ln(x+e^x)\right]}{D_x\left[3x\right]} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x+e^x}(1+e^x)}{3} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{1+e^x}{3(x+e^x)}
\end{aligned}$$

Como el límite sigue teniendo la forma $\frac{+\infty}{+\infty}$ se puede aplicar nuevamente la regla de L'Hopital, obteniendo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+e^x)}{3x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{D_x\left(1+e^x\right)}{D_x\left(3(x+e^x)\right)} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{3(1+e^x)}
\end{aligned}$$

Como el límite sigue teniendo la forma $\frac{+\infty}{+\infty}$ se puede aplicar nuevamente la regla de L'Hopital, obteniendo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+e^x)}{3x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{D_x(e^x)}{D_x\left(3(1+e^x)\right)} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{3e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$