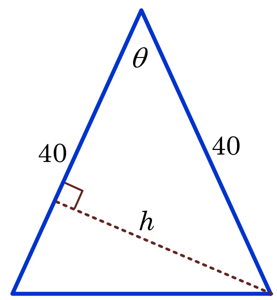
PROBLEMA RESUELTO 3

El ángulo en el vértice opuesto a la base de un triángulo isósceles, cuyos lados iguales miden 40 pulgadas aumenta a razón de $\frac{\pi}{10}$ radianes por minuto. ¿Con que rapidez aumenta el área del triángulo, cuando la medida del ángulo en el vértice es igual a $\frac{\pi}{6}$ radianes?

Solución

En la figura siguiente se muestra el triángulo isósceles del problema, en donde se ha trazado la altura perpendicular a uno de los lados iguales



Hay que construir una ecuación que relacione el área del triángulo, cuya razón de cambio de busca, con la medida del ángulo en el vértice, cuya razón de cambio se conoce

$$A = \frac{1}{2}(40)h = 20h$$

Ahora hay que expresar h en términos del ángulo

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{h}{40}$$
$$h = 40\operatorname{sen}\theta$$

El área del triángulo en términos de h es

$$\begin{aligned} A &= 20h \\ &= 20(40\operatorname{sen}\theta) \\ A &= 800\operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

Derivando respecto al tiempo

$$D_t A = D_t(800\operatorname{sen}\theta)$$
$$D_t A = 800\cos\theta \cdot D_t\theta$$

Evaluando para $\theta = \frac{\pi}{6}$ y $D_t\theta = \frac{\pi}{10}$

$$D_t A = D_t(800\operatorname{sen}\theta)$$
$$D_t A = 800\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cdot\left(\frac{\pi}{10}\right) = 800\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{10} = 40\pi\sqrt{3}\,\frac{\text{pul}^2}{\text{seg}}$$