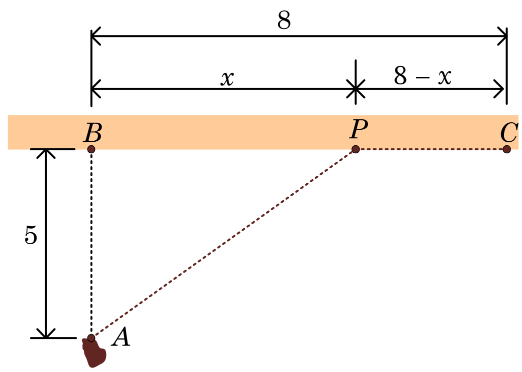
PROBLEMA RESUELTO 3

Una isla está ubicada en el punto A, a 5 km de distancia de una playa recta. Un lanchero en la isla quiere ir a un punto C, a 8 km del punto B sobre la playa. El lanchero puede remar a un punto P entre B y C a una rapidez de 3 km/h y después caminar en forma recta de P a C a 5 km/h. Calcule la distancia de B a P de tal forma que el recorrido se haga en el menor tiempo posible.

Solución

La siguiente figura muestra la isla y la disposición de los puntos sobre la playa recta, donde x es la distancia entre el punto B y el punto C



Utilizando el teorema de Pitágoras se calcula la distancia recorrida en lancha del punto A al punto P

$$d_1 = \sqrt{x^2 + 25}$$

Mientras que la distancia que recorre caminando del punto P al punto C es

$$d_2 = 8 - x$$

El tiempo total utilizado al trasladarse del punto A al punto C es la suma de los tiempos de los dos recorridos. Como la velocidad es constante se utiliza la fórmula del movimiento rectilíneo uniforma

$$D = vt$$

$$t = \frac{d}{v}$$

La función que expresa el tiempo total del recorrido en términos de la distancia x es

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 25}}{3} + \frac{8 - x}{5}$$

El dominio de esta función es el intervalo cerrado $\left[0,8\right]$ ya que la distancia entre B y P no puede ser mayor que 8.

Calculando la primera derivada

$$T'(x) = D_x\left(\frac{\sqrt{x^2 + 25}}{3} + \frac{8 - x}{5}\right)$$

$$
\begin{aligned}
T'(x) &= \frac{1}{6}\left(x^2+25\right)^{-1/2}(2x)-\frac{1}{5}\\
&= \frac{x}{3\sqrt{x^2+25}}-\frac{1}{5}\\
&= \frac{5x-3\sqrt{x^2+25}}{15\sqrt{x^2+25}}
\end{aligned}
$$

Igualando la primera derivada a cero y despejando x para obtener los valores críticos

$$
\begin{aligned}
5x-3\sqrt{x^2+25} &= 0\\
5x &= 3\sqrt{x^2+25}\\
25x^2 &= 9(x^2+25)\\
16x^2 &= 225\\
x &= \sqrt{\frac{225}{16}}=\frac{15}{4}=\\
x &= 3.75 \text{ km}
\end{aligned}
$$

El único valor crítico es $x = 3.75$

Evaluando la función en los extremos del intervalo y en el valor crítico

$$T(0)=\frac{\sqrt{0^2+25}}{3}+\frac{8-0}{5}=\frac{5}{3}+\frac{8}{5}\approx 3.27 \text{ horas}$$

$$T(8)=\frac{\sqrt{8^2+25}}{3}+\frac{8-8}{5}=\frac{\sqrt{89}}{3}\approx 3.14 \text{ horas}$$

$$T(3.75)=\frac{\sqrt{(3.75)^2+25}}{3}+\frac{8-3.75}{5}=\frac{\sqrt{89}}{3}\approx 2.93 \text{ horas}$$

Es decir que el lanchero debe remar a un punto P que se localiza a 3.75 km del punto B para que el tiempo total del recorrido sea mínimo.

La siguiente figura muestra la gráfica de la función en el intervalo $\left[0,8\right]$, que verifica la solución analítica, el mínimo está en el punto $(3.75, 2.93)$