PROBLEMA RESUELTO 2

Encuentre los intervalos donde la función dada es creciente, intervalos donde es decreciente, intervalos donde es cóncava hacia arriba o hacia abajo, máximos y mínimos locales, puntos de inflexión y dibuje la representación gráfica.

$$f(x) = x^{2/3} - 2x^{1/3}$$

Solución

Primero se calcula la primera y segunda derivada, simplificando las expresiones obtenidas

$$f'(x) = D_x(x^{2/3} - 2x^{1/3}) = \tfrac{2}{3}x^{-1/3} - \tfrac{2}{3}x^{-2/3}$$

$$= \frac{2}{3x^{1/3}} - \frac{2}{3x^{2/3}} = \frac{2x^{1/3} - 2}{3x^{2/3}}$$

$$f''(x) = D_x(\tfrac{2}{3}x^{-1/3} - \tfrac{2}{3}x^{-2/3}) = -\frac{2}{9}x^{-4/3} + \frac{4}{9}x^{-5/3}$$

$$= -\frac{2}{9x^{4/3}} + \frac{4}{9x^{5/3}} = \frac{-2x^{1/3} + 4}{9x^{5/3}}$$

Calculando los valores críticos de la primera y segunda derivada. Recuerde que los valores críticos son aquellos que hacen cero el numerador o bien el denominador.

Si $f'(x) = 0$, entonces

$$\frac{2x^{1/3} - 2}{3x^{2/3}} = 0$$

Para que una fracción sea igual a cero, es suficiente que el numerador sea igual a cero, por lo que se obtiene

$$2x^{1/3} - 2 = 0$$

$$x^{1/3} = 1$$

$$x = (1)^3 = 1$$

Por otro lado cuando $x = 0$ la primera derivada no está definida ya que el denominador es cero. Por lo tanto los valores críticos de la primera derivada son $x = 1$ y $x = 0$.

Si $f''(x) = 0$ entonces

$$\frac{-2x^{1/3} + 4}{9x^{5/3}} = 0$$

$$-2x^{1/3} + 4 = 0$$

$$x^{1/3} = 2$$

$$x = (2)^3 = 8$$

Como de nuevo, la segunda derivada no está definida cuando $x = 0$, los valores críticos de la segunda derivada son $x = 8$ y $x = 0$.

La tabla siguiente resume los resultados para cada intervalo. Recuerde que para construir esta tabla debe tomar un valor de prueba en cada intervalo y evaluarlo en la primera derivada para establecer si la función es creciente o decreciente, luego evaluarlo en la segunda derivada para saber si la función es cóncava hacia arriba o hacia abajo.

Intervalo	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusión
$(-\infty,0)$		$-$	$-$	Decreciente, cóncava hacia abajo
$x = 0$	0	$\nexists$	$\nexists$	Punto de inflexión
$(0,1)$		$-$	$+$	Decreciente, cóncava hacia arriba
$x = 1$	-1	0	$+$	Mínimo local, cóncava hacia arriba
$(1,8)$		$+$	$+$	Creciente, cóncava hacia arriba
$x = 8$	0	$+$	0	Creciente, punto de inflexión
$(8,\infty)$		$+$	$-$	Creciente, cóncava hacia abajo

Localizando primero los puntos correspondientes a los valores críticos y luego trazando la curva intervalo por intervalo, se obtiene la gráfica mostrada en la siguiente figura