PROBLEMA RESUELTO 2

Determine si la función satisface las condiciones del teorema del valor medio sobre el intervalo indicado. En caso afirmativo, determine todos los valores de c que satisfacen el teorema. Ilustre su resultado dibujando la gráfica de la función en el intervalo indicado.

$$f(x) = x + \frac{4}{x}; \qquad [1, 5]$$

Solución

a. La primera condición establece que la función debe ser continua en el intervalo cerrado $[1, 5]$. La función $f(x) = x + \frac{4}{x}$ es discontinua únicamente en $x = 0$, que no está en el intervalo, por lo que se concluye que la función es continua en el intervalo $[1, 5]$

b. La segunda condición establece que la función debe ser derivable en el intervalo abierto $(1,5)$. Calculando la primera derivada

$$\begin{aligned} f'(x) &= D_x\left(x + \frac{4}{x}\right) \\ &= 1 - \frac{4}{x^2} \\ &= \frac{x^2 - 4}{x^2} \end{aligned}$$

La derivada no está definida únicamente para $x = 0$, que no está en el intervalo $(1,5)$ Por lo tanto, si es derivable en el intervalo abierto $(1,5)$

Como se satisfacen las dos condiciones, el teorema del valor medio garantiza que existe al menos un número c en el intervalo $(1,5)$, tal que

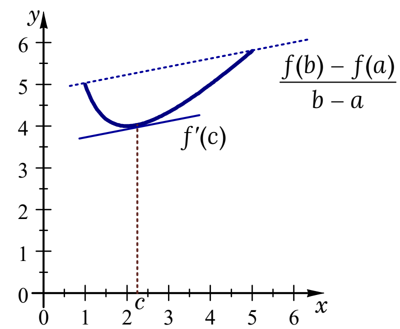
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Despejando el valor de c

$$f'(c) = \frac{\left(5 + \frac{4}{5}\right) - \left(1 + \frac{4}{1}\right)}{5 - 1} = \frac{\frac{29}{5} - 5}{4} = \frac{1}{5}$$

$$\begin{aligned} \frac{c^2 - 4}{c^2} &= \frac{1}{5} \\ 5(c^2 - 4) &= c^2 \\ 4c^2 &= 20 \\ c^2 &= 5 \\ c &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

La siguiente figura muestra la gráfica de la función en el intervalo $[1, 5]$. También se muestra la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, así como la pendiente de la recta tangente en c


y
x
$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
$f'(c)$
c
0
1
2
3
4
5
6